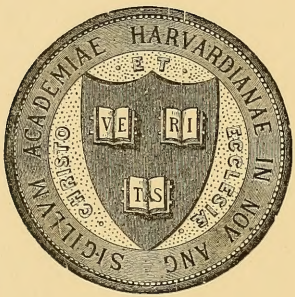
SOC
7130

HARVARD UNIVERSITY.



LIBRARY

OF THE

MUSEUM OF COMPARATIVE ZOÖLOGY.

167.

Exchange.

October 9, 1908.

167

MÉMOIRES

DE LA

SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES

DE LIÉGE.

Nec temere, nec timide.

TROISIÈME SÉRIE.

TOME II.

DÉPOTS :

LONDRES,	PARIS,	BERLIN,
chez Williams et Norgate,	chez Hermann, libraire,	chez Friedlander u. Sohn,
Henrietta Str., 14.	rue de la Sorbonne, 8.	Carlstrasse, 11.

BRUXELLES,

HAYEZ, IMPRIMEUR DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES
DES LETTRES ET DES BEAUX-ARTS DE BELGIQUE.

Rue de Louvain, 112.

JUILLET 1900.

OCT 9 1908

MÉMOIRES

DE LA

SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES

DE LIÉGE.

MÉMOIRES

DE LA

SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES

DE LIÉGE.

Nec temere, nec timide.

TROISIÈME SÉRIE.

TOME II.

DÉPOTS :

LONDRES, chez WILLIAMS et NORGATE, Henrietta Str., 14.

PARIS, chez HERMANN, libraire, rue de la Sorbonne, 8.

BERLIN, chez FRIEDLANDER u. Sohn, Carlstrasse, 11.

BRUXELLES,

HAYEZ, IMPRIMEUR DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES DES LETTRES ET DES BEAUX-ARTS DE BELGIQUE.

Rue de Louvain, 112.

JUILLET 1900.

aq 30/14

TABLE

DES

MÉMOIRES CONTENUS DANS LE TOME II.

1. La loi du diamètre rectiligne et les lois des états correspondants; par E. Mathias.

2. Recherches anatomiques sur l'embryon et les plantules dans la famille des Renonculacées; par R. Sterckx.

3. Quelques propriétés nouvelles des racines des fonctions de Bessel de première espèce; par L. Gegenbauer.

4. Sur une transformation géométrique; par V. Retali.

5. Nouveaux principes de la géométrie avec une théorie complète des parallèles; par Lobatchévsky (traduit du russe par F. Mallieux).

6. Longitude de l'Observatoire de Cointe; par C. le Paige.

7. Les permutations carrées de base 6; par G. Tarry.

8. Anatomie comparée du *Chlorophytum elatum* (Ait.) et du *Tradescantia virginica* L.; par A. Gravis et P. Donceel.

9. Déterminations de la déclinaison et de la composante horizontale de la force magnétique à l'aide du théodolite-boussole d'Abbadie-Mascart; par M. Deualu.

10. Sur la théorie des équations algébriques et en particulier sur le cas irréductible de la formule de Cardan; par L. Gegenbauer.

LISTE

DES

MEMBRES DE LA SOCIÉTÉ

(JUILLET 1900).

Bureau.

Président,	M. Selys Longchamps (baron E. de).
Vice-Président,	» A. Gravis.
Secrétaire général,	» C. le Paige.
Trésorier-Bibliothécaire,	» J. Deruyts.

Membres effectifs.

1842 Selys Longchamps (baron E. de), membre de l'Académie royale de Belgique.

1855 Dewalque, G., professeur émérite à l'université de Liége, membre de l'Académie royale de Belgique.

1860 Gillon, A., professeur émérite à l'université.

1870 Masius, V., professeur à l'université, membre de l'Académie royale de Belgique.

Vanlair, C., professeur émérite à l'université, membre de l'Académie royale de Belgique.

1871 Van Beneden, Éd., professeur à l'université, membre de l'Académie royale de Belgique.

1874 Firket, Ad., chargé de cours à l'université, ingénieur en chef au corps des mines.

1878 le Paige, C., professeur à l'université, membre de l'Académie royale de Belgique.

1879 Jorissen, A., professeur à l'université, correspondant de l'Académie royale de Belgique.

1880 Neuberg, J., professeur à l'université, membre de l'Académie royale de Belgique.

1881 Fraipont, J., professeur à l'université, correspondant de l'Académie royale de Belgique.

1884 Deruyts, J., professeur à l'université, membre de l'Académie royale de Belgique.

Ronkar, Ém., professeur à l'université.

Ubaghs, P., répétiteur à l'université.

1885 Gravis, A., professeur à l'université, correspondant de l'Académie royale de Belgique.

1887 Lohest, M., professeur à l'université.

Deruyts, Fr., chargé de cours à l'université, correspondant de l'Académie royale de Belgique.

De Heen, P., professeur à l'université, membre de l'Académie royale de Belgique.

1890 Beaupain, J., docteur en sciences, ingénieur au corps des mines.

1897 Cesàro, G., professeur à l'université, correspondant de l'Académie royale de Belgique.

1898 Hubert, H., chargé de cours à l'université, ingénieur en chef au corps des mines.

Micheels, H., docteur en sciences, professeur à l'Athénée royal de Tongres.

1900 Lonay, H., docteur en sciences, assistant à l'université.

Membres correspondants.

I. — Sciences physiques et mathématiques.

1853 Bède, Em., industriel, à Bruxelles.
1855 Liais, ancien directeur de l'Observatoire de Rio de Janeiro, maire de Cherbourg.
1863 Gossage, membre de la Société chimique, à Londres.
1865 Hugueny, professeur, à Strasbourg.
De Colnet d'Huart, conseiller d'État, à Luxembourg.
Dausse, ingénieur en chef des ponts et chaussées, à Paris.
Folie, F., directeur honoraire de l'Observatoire royal de Bruxelles.
1866 Ledent, directeur de l'École des textiles de Verviers.
1867 Barnard, président de l'École des mines, à New-York.
1869 Marié Davy, directeur de l'Observatoire météorologique de Montsouris.
Schlömilch, professeur à l'École polytechnique de Dresde.
1871 Henry, L., professeur à l'université de Louvain.
Durége, professeur à l'université de Prague.
Masters, Maxwell T., membre de la Société royale, à Londres.
Le Boulengé, P., général.
1872 Vallès, inspecteur honoraire des ponts et chaussées, à Paris.
Garibaldi, professeur à l'université de Gênes.
Kanitz, Dr Aug., professeur à l'université de Klausenbourg.
1873 Hermite, Ch., membre de l'Institut, à Paris.
Darboux, G., membre de l'Institut, à Paris.
1875 Mansion, P., professeur à l'université de Gand.
Michaelis, O., captain, chief of Ordnance, à Saint-Paul, Minn., département de Dakota (États-Unis).

1875 Dewalque, Fr., professeur à l'université de Louvain.

1876 Balfour, Th. G. H., membre de la Société royale, à Londres.

1877 Tissandier, Gaston, rédacteur du journal *la Nature*, à Paris.

1879 Czuber, professeur, à Prague.

1880 Cremona, Luigi, directeur de l'École d'application, à Rome.
Studnička, F., professeur à l'université de Prague.
Van der Mensbrugghe, Gustave, professeur à l'université de Gand.
De Tilly, J., lieutenant général, membre de l'Académie royale de Belgique, à Anvers.

1881 Sébert, colonel d'artillerie de la marine française, à Paris.
Angot, A., attaché au bureau central météorologique de France, à Paris.
Wiedemann, G., professeur à l'université de Leipzig.
Kohlrausch, directeur de l'Institut physique de Wurzbourg.
Quincke, professeur à l'université d'Heidelberg.
Guiscardi, professeur à l'université de Naples.
Laisant, C.-A., député, à Paris.

1882 Mascart, membre de l'Institut, à Paris.

1883 Breithof, N., professeur à l'université de Louvain.
Mittag-Leffler, G., professeur à l'université de Stockholm.
Gomès Teixeira, F., ancien professeur à l'université de Coïmbre.

1885 Schur, Fréd., professeur à l'université de Dorpat.
Picquet, répétiteur à l'École polytechnique, à Paris.
de Longchamps (Gohierre), professeur au lycée Charlemagne, à Paris.
Vaněček, J. S., professeur, à Jičin (Bohême).
Cesàro, E., professeur à l'université, à Naples.

1887 Walras, L., professeur à l'Académie de Lausanne.
Guccia, docteur en sciences, à Palerme.

1887 Wullner, professeur à l'École polytechnique d'Aix-la-Chapelle.

Paalzow, directeur de l'École technique de Berlin.

1888 Ocagne (Maurice d'), professeur à l'École des ponts et chaussées, à Paris.

1898 Gordan, P., professeur à l'université d'Erlangen.

Korteweg, D.-J., professeur à l'université d'Amsterdam.

Lampe, Em., directeur du *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*, professeur à Berlin.

Mathias, Em., professeur à l'université de Toulouse.

Brocard, H., ancien officier du génie, à Bar-le-Duc.

II. — Sciences naturelles.

1853 Waterhouse, Ch., conservateur au Musée britannique, à Londres.

1854 Drouet, H., naturaliste, à Dijon.

Lucas, H., aide-naturaliste au Museum d'histoire naturelle, à Paris.

Blanchard, E., membre de l'Institut, à Paris.

1855 Geinitz, H. B., professeur à l'École polytechnique, à Dresde.

1864 Thomson, J., membre de la Société entomologique de France, à Paris.

Brüner de Watteville, directeur général des télégraphes, à Vienne.

1865 Le Jolis, archiviste perpétuel de la Société des sciences naturelles de Cherbourg.

Hamilton, membre de la Société géologique de Londres.

De Borre, A., ancien conservateur au Musée royal d'histoire naturelle de Bruxelles, à Genève.

1866 Rodriguez, directeur du Musée zoologique de Guatémala.

1867 Gosselet, J., professeur à la faculté des sciences de Lille.

Radoszkoffski, président de la Société entomologique de Saint-Pétersbourg.

1869 Simon, E., naturaliste, à Paris.

1870 Trautschold, professeur, à Carlsruhe.

Malaise, C., professeur émérite à l'Institut agronomique de Gembloux.

1871 Thomson, James, vice-président de la Société géologique de Glasgow.

Capellini (commandeur G.), professeur de géologie à l'université de Bologne.

1873 Clos, directeur du Jardin des Plantes, à Toulouse.

Hall, James, paléontologiste de l'État, à Albany.

Whitney, J. D., géologue de l'État, directeur du *Geological Survey* de Californie.

Glaziou, botaniste, à Rio de Janeiro.

De Carvalho (Pedro Alphonso), docteur en médecine, directeur de l'Hôpital de la Miséricorde, à Rio de Janeiro.

Moreno, F. P., paléontologiste, à Buenos-Ayres.

Areschoug, professeur adjoint à l'université de Lund.

1874 Gegenbauer, professeur à l'université de Heidelberg.

Häckel, professeur à l'université de Iéna.

Waldeyer, professeur à l'université de Berlin.

1875 Eimer, professeur à l'université de Tubingue.

De la Valette Saint-George, professeur à l'université de Bonn.

Ray-Lankester, professeur à l'université de Londres.

Packard, professeur à l'université de Salem.

Flemming, W., professeur à l'université de Kiel.

Plateau, F., professeur à l'université de Gand.

1876 Balfour, I. B., professeur de botanique à l'université, à Oxford.

1877 Mac Lachlan, Rob., membre de la Société entomologique, à Londres.

1878 Hertwig, R., professeur à l'université de Munich.

Strasburger, professeur à l'université de Bonn.

Brongniart, Charles, à Paris.

1879 WETTERBY, professeur à l'université de Cincinnati.
BOLIVAR, I., professeur, à Madrid.
RITSEMA, conservateur au Musée royal d'histoire naturelle, à Leyde.
RENARD, Alphonse, professeur à l'université de Gand.
1881 KEY, Axel, professeur à l'École de médecine de Stockholm.
RETZIUS, G., professeur à l'École de médecine de Stockholm.
TARAMELLI, professeur à l'université de Pavie.
GESTRO, Dr R., conservateur au Musée d'histoire naturelle de Gênes.
SALVADORI (comte Th.), professeur à l'université de Turin.
1883 HULL, Edward, directeur du *Geological Survey* d'Irlande.
SANDBERGER, Fridolin, professeur à l'université de Wurzbourg.
1884 TRINCHESE, professeur à l'université de Naples.
1898 CRÉPIN, Fr., membre de l'Académie royale de Belgique, à Bruxelles.
AGASSIZ, Alexandre, à Cambridge (Mass.).
BERTRAND, C.-E., professeur de botanique à la Faculté des sciences de Lille.
BLANCHARD, Raphaël, assistant au Museum d'histoire naturelle, à Paris.

LISTE

DES

SOCIÉTÉS SAVANTES, REVUES, ETC.,

AVEC LESQUELLES

LA SOCIÉTÉ DES SCIENCES DE LIÉGE

échange ses publications.

BELGIQUE.

Bruxelles. — *Académie royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique.*
Observatoire royal.
Société entomologique de Belgique.
Société malacologique de Belgique.
Société royale belge de géographie.
Société belge de microscopie.
Musée royal d'histoire naturelle.

Liége. — *Société géologique.*

Mons. — *Société des sciences, des lettres et des beaux-arts du Hainaut.*

Gand. — *Mathesis,* directeurs : MM. P. Mansion et J. Neuberg.

ALLEMAGNE.

Berlin. — *Königliche Akademie der Wissenschaften.*
Deutsche geologische Gesellschaft.
Entomologischer Verein.
Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, directeur : M. Lampe (Kurfürstenstr., 139).

Bonn. — *Naturhistorischer Verein der Preussischen Rheinlande und Westphalens.*

Breslau. — *Schlesische Gesellschaft für vaterländische Cultur.*

Colmar. — *Société d'histoire naturelle.*

Erlangen. — *Physikalisch-medicinische Societät.*

Francfort. — *Senckenbergische naturwissenschaftliche Gesellschaft.*

Fribourg. — *Naturforschende Gesellschaft.*

Giessen. — *Oberhessische Gesellschaft für Natur- und Heilkunde.*

Görlitz. — *Naturforschende Gesellschaft.*
Oberlausitzische Gesellschaft der Wissenschaften.

Göttingue. — *Königliche Gesellschaft der Wissenschaften und Georg-August-Universität.*

Halle. — *Naturwissenschaftlicher Verein für Sachsen und Thüringen.*
Naturforschende Gesellschaft.
Kaiserliche Leopoldinisch-Carolinische Deutsche Akademie der Naturforscher.

Kiel. — *Naturwissenschaftlicher Verein.*

Königsberg. — *Königliche physikalisch-ökonomische Gesellschaft.*

Landshut. — *Botanischer Verein.*

Leipzig. — *Naturforschende Gesellschaft.*

Metz. — *Académie des lettres, sciences, arts et agriculture.*

Munich. — *Königliche bayerische Akademie der Wissenschaften.*
Königliche Sternwarte.

Munster. — *Westfälischer Provincial-Verein für Wissenschaften und Kunst.*

Offenbach. — *Offenbacher Verein für Naturkunde.*

Stettin. — *Entomologischer Verein.*

Stuttgart. — *Verein für vaterländische Naturkunde in Würtemberg.*

Wiesbaden. — *Nassauischer Verein für Naturkunde.*

Wurzbourg. — *Physikalisch-medicinische Gesellschaft in Würzburg.*

Zwickau. — *Verein für Naturkunde.*

AUTRICHE-HONGRIE.

Agram. — *Académie Sudo-Slave des sciences.*

Cracovie. — *Académie des sciences.*

Hermannstadt. — *Siebenbürgischer Verein für Naturwissenschaften.*

Innspruck. — *Naturwissenschaftlich-medicinischer Verein.*

Prague. — *Königlich böhmische Gesellschaft der Wissenschaften.*
Kaiserlich-Königliche Sternwarte.
Ceske Akademie Cisare Frantiska Josepha.

Trieste. — *Société adriatica di Scienzi naturali.*

Vienne. — *Kaiserliche Akademie der Wissenschaften.*
Kaiserlich-Königliche zoologisch-botanische Gesellschaft.
Kaiserlich-Königliche geologische Reichsanstalt.
Monatshefte für Mathematik und Physik, rédacteurs : MM. Escherich et Gegenbauer, professeurs à l'université.

ESPAGNE.

Madrid. — *Real Academia de Ciencias.*

FRANCE.

Agen. — *Société d'agriculture, sciences et arts.*

Béziers. — *Société d'étude des sciences naturelles.*

Bordeaux. — *Académie des sciences, belles-lettres et arts.*
Société linnéenne.
Société des sciences physiques et naturelles.

Caen. — *Société linnéenne de Normandie.*

Cherbourg. — *Société des sciences naturelles.*

Dijon. — *Académie des sciences.*

Lille. — *Société des sciences, de l'agriculture et des arts.*

Lyon. — *Académie des sciences.*
Société d'agriculture.
Société linnéenne.
Université.

Marseille. — *Faculté des Sciences.*

Montpellier. — *Académie des sciences et lettres.*

Nancy. — *Société des sciences (ancienne Société des sciences natu relles de Strasbourg).*

Nantes. — *Société des sciences naturelles de l'Ouest de la France*

Paris. — *Société Philomatique.*
Muséum d'histoire naturelle.
Société mathématique de France.

Rouen. — *Société des amis des sciences naturelles.*
Académie des sciences.

Toulouse. — *Académie des sciences.*
Société des sciences physiques et naturelles.
Faculté des Sciences.

Troyes. — *Société académique de l'Aube.*

GRANDE-BRETAGNE ET IRLANDE.

Dublin. — *Royal Irish Academy.*
Royal Society.

Édimbourg. — *Geological Society.*
Mathematical Society.

Glasgow. — *Geological Society.*
Natural history Society.
Philosophical Society.

Londres. — *Geological Society.*
Linnean Society.
Royal Society.

Manchester. — *Litterary and philosophical Society.*

ITALIE.

Bologne. — *Accademia delle Scienze.*

Catane. — *Accademia gioenia di scienze naturali.*

Florence. — *Institut supérieur.*

Gênes. — *Osservatorio della R. Universita.*

Modène. — *Societa dei naturalisti.*

Naples. — *Societa Reale.*

Palerme. — *Societa di scienze naturali e economiche.*
Circolo matematico.

Pise. — *Societa di scienze naturali.*
Nuovo Cimento, rédacteurs : MM. Felici, Batelli et Volterra.

Rome. — *Reale Accademia dei Lincei.*
Accademia pontificia de' Nuovi Lincei.
R. Comitato geologico d'Italia.

Turin. — *Reale Academia delle Scienze.*

LUXEMBOURG.

Luxembourg. — *Institut royal grand-ducal, section des sciences naturelles et mathématiques.*
Société botanique du grand-duché de Luxembourg.

NÉERLANDE.

Amsterdam. — *Koninklijke Academie van wetenschappen.*
Société mathématique.

Delft. — *École polytechnique.*

Harlem. — *Société hollandaise des sciences.*
Musée Teyler.

Rotterdam. — *Bataafsch Genootschap der proefondervindelijke wijsbegeerte.*

PORTUGAL.

Coïmbre. — *Journal des sciences mathématiques et astronomiques*, rédacteur : M. Gomès Teixeira.

Lisbonne. — *Académie des sciences.*

RUSSIE.

Helsingfors. — *Société des sciences de Finlande.*

Kazan. — *Société physico-mathématique.*

Kharkoff. — *Société mathématique.*

Juriew. — *Université.*

Moscou. — *Société impériale des naturalistes.*

Saint-Pétersbourg. — *Académie impériale des sciences.*
Archives des sciences biologiques.
Société d'archéologie et de numismatique.
Société entomologique.

SUÈDE ET NORVÈGE.

Bergen. — *Museum.*

Christiania. — *Kongelige Frederiks Universitet.*

Göteborg. — *Kongl. Vetenskaps och Vitterhetssamhälle.*

Stavanger. — *Museum.*

Stockholm. — *Académie royale des sciences.*
Nordist medicinskt Arkiv, directeur : Dr Axel Key.
Entomologiska föreningen, 94, Drottninggatan.
Acta mathematica, rédacteur : M. Mittag-Leffler.

Throndhjem. — *K Norske Videnskabers Selskabs.*

Upsal. — *Société royale des Sciences.*

DANEMARK.

Copenhague. — *Tidskrift for Mathematik :* Drs Juel et Foldberg (Romersgade, 9).
Académie royale des sciences.

SUISSE.

Berne. — *Naturforschende Gesellschaft.*
Société helvétique des sciences naturelles.

Neuchâtel. — *Societé des sciences naturelles.*

Schaffhouse. — *Naturforschende Gesellschaft.*

Zurich. — *Naturforschende Gesellschaft.*

AMÉRIQUE.

ÉTATS-UNIS.

Austin. — *Texas Academy of sciences.*

Baltimore. — *American Journal of mathematics. (Johns Hopkins University.)*

Boston. — *American Academy of arts and sciences.*
Society of natural History.

Madison. — *Wisconsin Academy of sciences, letters and arts.*

New-Haven. — *Connecticut Academy of arts and sciences.*

New-York. — *Academy of sciences.*
Museum of natural history.
American Mathematical Society.

Philadelphie. — *Academy of natural sciences.*
American philosophical Society.
Wagner Free Institute of sciences.

Portland. — *Natural History Society.*

Rochester. — *Academy of sciences.*

Saint-Louis, Mo. — *Botanical Garden.*

Salem. — *Essex Institute.*
American Association for advancement of sciences.

San-Francisco. — *Californian Academy of sciences.*

Washington. — *Smithsonian Institution.*

CANADA.

Ottawa. — *Geological Survey of Canada.*
Commission de géologie et d'histoire naturelle du Canada.

Toronto. — *Canadian Institute.*

CHILI.

Santiago. — *Société scientifique du Chili.*

MEXIQUE.

Mexico. — *Société Antonio Alzate.*
Observatoire météorologique central

Tacubaya. — *Observatoire national.*

RÉPUBLIQUE ARGENTINE.

Buenos-Ayres. — *Universidad.*

ASIE.

INDES ANGLAISES.

Calcutta. — *Asiatic Society of Bengal.*

INDES HOLLANDAISES.

Batavia. — *Koninklijke natuurkundige vereeniging in Nederlandsch Indië.*

SIBÉRIE.

Irkutsk. — *Ostsibirische Abtheilung der K. Russischen geographischen Gesellschaft.*

AUSTRALIE.

Adelaïde. — *Australian Association for advancement of science.*
Royal Society of South Australia.

Hobart-Town. — *Tasmanian Society of natural sciences.*

Melbourne. — *Observatoire.*

Sydney. — *Linnean Society.*
Royal Society of New South Wales.

LA LOI

DU

DIAMÈTRE RECTILIGNE

ET

LES LOIS DES ÉTATS CORRESPONDANTS

PAR

M. E. MATHIAS,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE.

Mémoire présenté à la Société des Sciences le 15 juin 1899.

LA LOI

DU

DIAMÈTRE RECTILIGNE

ET

LES LOIS DES ÉTATS CORRESPONDANTS

§ 1. — Supposons que l'état d'un fluide ne dépend que de deux variables arbitraires, la pression p, le volume v et la température absolue T étant reliés au moyen d'une *équation caractéristique* qu'il n'est pas besoin de connaître; si cette équation contient *trois* paramètres spécifiques de chaque corps, — c'est-à-dire en nombre égal au nombre des variables p, v, T, — M. Meslin a montré (*) que les fluides obéissent nécessairement aux lois des états correspondants. Dès lors, toute relation physique entre p, v, T obéit à deux conditions :

1° Elle ne dépend que des rapports

$$\frac{v}{\varphi}, \quad \frac{p}{\pi}, \quad \frac{\mathrm{T}}{\Theta},$$

les quantités φ, π, Θ étant les constantes critiques;

2° La fonction qui représente cette relation physique *est la même pour tous les fluides de la nature.*

(*) G. Meslin, *Comptes rendus*, t. CXVI, p. 135, 1893.

La difficulté de vérifier avec précision ces lois provient de deux causes distinctes :

1° On ne connaît le plus souvent qu'avec assez peu d'approximation les valeurs numériques des constantes critiques des corps;

2° On ignore à peu près totalement, dans chaque cas particulier, l'expression analytique *rigoureuse* représentant la relation physique qui doit satisfaire aux lois de correspondance.

Dans ces conditions, M. Amagat (*) tourne la difficulté par une comparaison de constructions graphiques, comparaison indépendante des valeurs numériques des constantes critiques et indépendante aussi de l'expression analytique de la relation physique que l'on a en vue. Il remarque que, pour les courbes représentatives de la relation considérée, un changement d'unités revient à un changement d'échelle sur les axes des coordonnées; que, par suite, on devra toujours pouvoir rendre l'une des courbes semblable à l'autre par une extension ou un raccourcissement suivant l'un des axes; il suffira alors d'agrandir ou de diminuer le dessin en le laissant semblable à lui-même pour que sa coïncidence avec le premier puisse avoir lieu.

Considérons, en particulier, la relation physique représentée par la *courbe des densités* (**); en appliquant aux courbes des densités relatives à différents corps la déformation systématique de M. Amagat, on doit pouvoir superposer ces courbes et, par conséquent, leurs diamètres rectilignes.

(*) E.-H. Amagat, *Comptes rendus*, t. CXXIII, p. 30, 1896; *Journ. de phys.* [3], t. VI, p. 5, 1897; *Séances de la Société française de physique*, année 1896, p. 221.

(**) On obtient cette courbe en portant en ordonnées les densités de liquide et de vapeur saturée, les températures étant portées en abscisses; les deux arcs de courbe caractéristiques du liquide et de la vapeur saturée se raccordent, à la température critique, suivant une tangente parallèle à l'axe des ordonnées, l'ensemble constituant la *courbe des densités*. Pour les corps dont le poids moléculaire ne varie pas avec la température, cette courbe obéit à la *loi du diamètre rectiligne*, le coefficient angulaire du diamètre, toujours négatif, étant très petit en valeur absolue.

Au lieu d'opérer par déformation de courbes graphiques, on peut profiter de ce que le diamètre conjugué des cordes parallèles à l'axe des ordonnées est rigoureusement *une droite*, — existant pour certains corps comme le sulfure de carbone et la benzine dans un intervalle de températures égal ou supérieur à 250° — c'est-à-dire une courbe dont on peut écrire l'équation. Les conditions nécessaires et suffisantes des états correspondants se réduisent dans ce cas particulier à *une;* il est alors très aisé de voir si l'expérience vérifie ou non cette condition *unique* et, par suite, quelle est la valeur des lois des états correspondants.

J'ai montré, dans un travail antérieur (*), que si l'on désigne par y l'ordonnée du diamètre rectiligne relative à la température absolue $T = m\,\Theta$, par $-\operatorname{tg}\alpha$ son coefficient angulaire, par Δ la température critique et par Θ la température critique absolue, on a

$$(1)\quad \frac{y}{\Delta} = 1 + a\,(1 - m),$$

en posant

$$(2)\quad a = \frac{\Theta}{\Delta}\operatorname{tg}\alpha.$$

La condition unique de vérification des lois des états correspondants est la *constance* de a; tout revient donc à connaître cette quantité.

§ 2. Conditions de la détermination de a. — Il y a deux cas à distinguer selon que, pour le corps dont il s'agit, on a fait une étude complète permettant de tracer la courbe des densités, ou selon qu'on ne possède que quelques valeurs de la densité du liquide à des températures inférieures ou égales au point d'ébullition du corps sous la pression atmosphérique.

Dans le premier cas, le diamètre rectiligne est admirablement déterminé; son intersection, presque à angle droit avec l'or-

(*) E. Mathias, *Sur la densité critique.* (Ann. de la Fac. des Sc. de Toulouse de 1892.)

donnée relative à la température critique, donne la densité critique Δ, une légère incertitude sur la température critique influant à peine sur Δ. La valeur absolue du coefficient angulaire du diamètre étant comprise, en général, entre 0,0010 et 0,0004, une erreur de un degré sur la température critique n'altère Δ que de moins d'une unité du troisième ordre décimal; donc, en général, Δ et Θ sont connus *à quelques millièmes près*, ou même mieux. Il en est de même de $\operatorname{tg}\alpha$; par suite, la quantité a est connue avec la même précision.

Supposons maintenant le second cas; on ne connaît que quelques valeurs de la densité du liquide à des températures très éloignées de la température critique; pourra-t-on avec quelque précision obtenir la quantité a? C'est ce que je me propose de rechercher.

A la densité de liquide δ, relative à la température absolue $T = 273 + t$, correspond la densité de vapeur saturée δ'; *cette densité, si petite qu'elle soit par rapport à* δ, *n'est pas absolument négligeable.* On peut en avoir une valeur très approchée en la calculant par l'application de la loi de Mariotte et de la loi de Gay-Lussac connaissant la densité de vapeur δ du corps considéré (par rapport à l'air et dans les conditions normales) et au moins approximativement la pression de la vapeur saturée à la température absolue T exprimée en centimètres de mercure. Il est le plus souvent suffisant de connaître les deux premiers chiffres (*) significatifs δ'. Dès lors, chaque valeur de $\frac{\delta+\delta'}{2}$ donne

(*) Si l'on multiplie cette densité par le rapport k de la densité de vapeur saturée *réelle* à la densité *théorique*, rapport déterminé par les belles expériences du professeur S. Young (voir *Generalizations of Van der Waals*, Phil. Mag. [5], t. XXXIII, p. 174, Table XVII), l'incertitude du calcul de δ' sera réduite à fort peu de chose. On aura donc très exactement

$$\delta' = \frac{0.0012932 \times 273 \times \delta_0}{T} \frac{p}{76} k.$$

Dans la pratique, on n'aura guère à utiliser k que pour les températures *réduites* m comprises entre 0.57 et 0.65. Pour $m < 0.57$, k est trop voisin de *un* pour que la correction soit utile et pour $m > 0.65$ la pression de la

un point du diamètre rectiligne, et l'on voit qu'il suffit théoriquement de connaître *deux* densités de liquide à des températures un peu distantes pour bien déterminer le diamètre.

Quand on connaît plus de deux valeurs de δ, *cela permet uniquement de vérifier l'exactitude de la loi du diamètre rectiligne, mais n'apporte aucun élément de plus.*

On possède donc le diamètre et par suite on connaît l'angle α, très petit, qu'il fait avec la direction des abscisses négatives; mais la relation

$$(2) \quad \ldots\ldots\ldots \quad a = \frac{\Theta}{\Delta} \operatorname{tg} \alpha$$

contient encore deux inconnues : Θ et Δ.

En somme, l'équation du diamètre rectiligne donnée par deux ou plusieurs points et la relation (2) *constituent deux équations à trois inconnues* Θ, Δ et a. *Il est donc impossible, sans autre renseignement, de résoudre la question rigoureusement.*

Il faut alors, de toute nécessité, ou faire une hypothèse sous la forme d'une relation nouvelle entre les quantités précédentes, ou en mesurer une directement.

§ 3. Formule de Thorpe et Rücker. Sa signification précise. — Se servir de deux densités de liquide aux basses pressions pour en déduire une valeur approchée de la température critique,

vapeur saturée p est généralement supérieure *à l'atmosphère.* Cependant, pour plus de commodité, le tableau suivant donne k jusqu'à $m = 0.75$ par interpolation graphique des nombres de S. Young relatifs au fluorure de benzène.

m	k	m	k	m	k	m	k
0.50	1.000	0.60	1.011	0.65	1.035	0.70	1.075
0.53	1.002	0.61	1.014	0.66	1.042	0.71	1.082
0.55	1.0035	0.62	1.018	0.67	1.050	0.72	1.093
0.57	1.005	0.63	1.022	0.68	1.058	0.73	1.102
0.59	1.008	0.64	1.029	0.69	1.065	0.74	1.115
						0.75	1.128

c'est précisément le but d'une formule proposée dès 1884 par MM. Thorpe et Rücker (*).

Si δ_1 et δ_2 sont les densités de liquide correspondant aux températures absolues de T_1 et T_2, on a

$$(3) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \frac{\delta_1}{\delta_2} = \frac{\mathfrak{A}\,\Theta - T_1}{\mathfrak{A}\,\Theta - T_2},$$

Θ étant la température critique absolue et $\mathfrak{A}$ une constante voisine de 2, mais dont la valeur moyenne paraissait à MM. Thorpe et Rücker être 1.995 d'après l'application de leur formule aux corps dont la dilatation et en particulier la température critique leur semblaient les plus certaines.

Résolue par rapport à Θ, la relation (3) prend la forme

$$(3)' \quad \ldots\ldots\ldots \quad \Theta = \frac{\delta_1 T_2 - \delta_2 T_1}{\mathfrak{A}\,(\delta_1 - \delta_2)}.$$

Cette relation provient de la combinaison de la loi de dilatation des liquides appelée ordinairement loi de Mendéléeff(**) avec le théorème de Van der Waals, relatif aux cœfficients de dilatation vraie des liquides considérés à des températures correspondantes et avec une *hypothèse particulière* sur la forme d'une certaine constante dépendant uniquement de la *température réduite*. En effet, des relations

$$\frac{V}{V_0} = \frac{1}{1 - k\,t} \qquad \frac{1}{V}\frac{dV}{dt}\Theta = c^{te} \qquad \frac{1}{c^{te}} = \mathfrak{A} - \frac{\Theta}{T}$$

$$T = 273 + t \qquad \frac{V}{V_0} = \frac{\delta_0}{\delta}$$

on tire la relation (3)

$$\frac{\delta}{\delta_0} = \frac{\mathfrak{A}\,\Theta - T}{\mathfrak{A}\,\Theta - T_0}.$$

(*) Thorpe et Rücker, *Trans. chem. Soc.*, t. CXXXV; 1884.

(**) Bien qu'elle ne soit qu'un cas particulier de la loi de dilatation très générale publiée dès 1882 par M. P. de Heen. (Voir *Bull. Acad. roy. Belg.* [3], t. IV; 1882.)

Cette relation peut encore être considérée, ainsi que l'a montré M. Konowalow, comme une conséquence de l'équation caractéristique des fluides de Van der Waals, sous la condition de très faibles pressions, la relation cessant d'être exacte lorsque la température se rapproche du point d'ébullition (*). La signification exacte de la relation (3) et la raison de la variation de la constante $\mathfrak{A}$ qu'elle renferme, n'apparaissent pas bien nettement parce que les fondements sur lesquels repose la démonstration de la formule ne sont pas inébranlables (**).

Il est beaucoup plus simple d'établir cette formule en s'appuyant exclusivement sur la loi du diamètre rectiligne, ainsi que je l'ai montré incidemment dans un travail antérieur (***), à une époque à laquelle le travail de MM. Thorpe et Rücker m'était inconnu.

Soient T_1 et T_2 deux températures absolues auxquelles les densités de vapeur saturée δ'_1 et δ'_2 sont négligeables devant les densités de liquide correspondantes δ_1 et δ_2; en vertu de l'équation (1), on peut écrire

$$\frac{\delta_1}{2\Delta} = 1 + a\left(1 - \frac{T_1}{\Theta}\right) \qquad \frac{\delta_2}{2\Delta} = 1 + a\left(1 - \frac{T_2}{\Theta}\right).$$

L'élimination de Δ fournit la relation

$$(4). \quad . \quad . \quad \frac{\delta_1}{\delta_2} = \frac{1 + a\left(1 - \frac{T_1}{\Theta}\right)}{1 + a\left(1 - \frac{T_2}{\Theta}\right)} = \frac{\left(1 + \frac{1}{a}\right)\Theta - T_1}{\left(1 + \frac{1}{a}\right)\Theta - T_2}.$$

(*) Konowalow, *Zeit. Phys. Chem.*, t. I, p. 39; 1887. — Voir aussi *Dictionnaire de Würtz*, 2e supplément, article *Critique* (*Point*), par Ph.-A. Guye.

(**) En effet, les démonstrations de MM. Thorpe et Rücker et de M. Konowalow reposent, particllement ou totalement, sur la formule de Van der Waals et ses conséquences; or, malgré ses mérites éminents, la formule de Van der Waals n'est sûrement pas l'expression exacte de la vérité.

(***) E. Mathias, *Sur la densité critique*, p. 17. (Ann. de la Fac. des Sc. de Toulouse de 1892.)

Si l'on compare les relations (3) et (4), on voit qu'il est nécessaire et suffisant pour les identifier de poser

$$(5). \quad \ldots \quad \mathfrak{A} = 1 + \frac{1}{a} \quad \text{ou} \quad a = \frac{1}{\mathfrak{A} - 1}.$$

La relation (5) montre que pour $a = 1$ on a $\mathfrak{A} = 2$ et inversement; or, dès 1884, MM. Thorpe et Rücker remarquaient que $\mathfrak{A}$ était très voisin de 2, tandis que, de mon côté, dans mon travail *sur la densité critique et le théorème des états correspondants*, j'insistais avec beaucoup de soin sur ce fait que la constance a oscille visiblement autour de l'unité, au moins dans la plupart des cas.

La signification précise de la formule de Thorpe et Rücker apparaît alors très nettement : *elle résulte de la combinaison de la loi du diamètre rectiligne avec l'hypothèse* $a = 1$, *ou voisin de un, la température étant assez basse pour qu'on puisse négliger la densité de la vapeur saturée devant celle du liquide.*

Pour plus de simplicité, prenons $a = 1$; *on peut, dans ce cas, remplacer la formule de Thorpe et Rücker par une construction géométrique simple qui donne d'un seul coup* Θ *et* Δ.

A cet effet, prenons deux axes de coordonnées rectangulaires; portons en ordonnées les densités δ_1 et δ_2 et en abscisses les

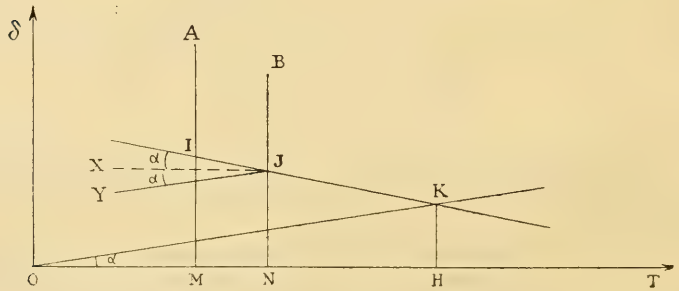


Fig. 1.

températures *absolues* T_1 et T_2; nous obtiendrons ainsi les points représentatifs A et B; joignons les milieux I et J des

ordonnées AM, BN, et nous aurons le diamètre rectiligne. Par J, menons une parallèle JX à la direction des abscisses négatives et faisons, au-dessous de JX, une droite JY faisant avec JX un angle α égal à IJX. Enfin, par l'origine O des coordonnées, menons une parallèle à JY ; elle coupe le diamètre IJ en un point K *qui est précisément le sommet de la courbe des densités du corps considéré.*

On a alors

$$KH = \Delta, \quad OH = \Theta,$$

et, a étant égal à *un*,

$$(2'). \quad \ldots\ldots\ldots \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta}{\Theta}.$$

Si satisfaisante que soit cette solution au point de vue géométrique, elle est mauvaise en réalité, parce que le sommet K de la courbe des densités est donné comme le point d'intersection de deux droites *presque parallèles;* il est donc mal déterminé. Or, une faible erreur relative sur la température absolue de Θ donne une grosse erreur absolue sur la température centigrade $t_c = \Theta - 273$, 2 °/₀ d'erreur sur Θ donnant le plus souvent 8 ou 10° d'erreur sur t_c.

Nous verrons pertinemment dans la suite de ce travail qu'il y a des corps, et assez nombreux, pour lesquels a est nettement différent de l'unité ; dans ce cas, la construction précédente n'est pas applicable, pas plus que la formule de Thorpe et Rücker. Il nous faut donc abandonner la formule de Thorpe et Rücker dont le succès, nous venons de le voir, est dû à un fait intéressant (a voisin de *un*), mais qui manque de généralité.

§ 4. Calcul précis de a au moyen des densités. — Nous retombons dès lors nécessairement sur la solution qui consiste à mesurer directement une des inconnues Δ, Θ ou a. On ne peut évidemment songer à la mesure de a, au moins dans l'état actuel de la science ; tous mes travaux conduisent à la même conclusion pour la densité critique Δ; *il faut donc absolument déterminer d'une façon directe la température critique,* si l'on veut connaître

avec précision a, ne possédant que quelques valeurs de la densité de liquide à des températures en général inférieures au point d'ébullition normale. Dans ces conditions, l'équation du diamètre rectiligne, jointe à la relation (2), fera connaître rigoureusement α, Δ et a (*).

Supposons tracée, dans l'hypothèse précédente, la courbe des densités du corps considéré. Aux densités *connues* δ_1, δ_2, δ_3, δ_4...

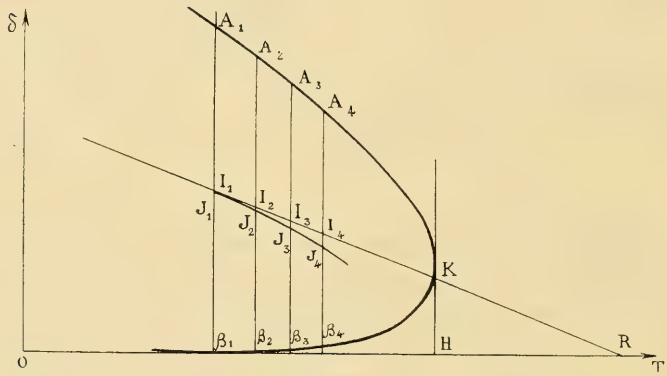


Fig. 2.

qui se rapportent aux températures absolues T_1, T_2, T_3, T_4... correspondent les points A_1, A_2, A_3, A_4... Soient B_1, B_2, B_3,

(*) Je ne parle que pour mention de la règle très simple indiquée presque en même temps par MM. Guldberg et Ph.-A. Guye, et d'après laquelle la température critique absolue est égale sensiblement au produit de la température absolue d'ébullition sous la pression de 20 millimètres multipliée par 2 ou à la température absolue d'ébullition normale multipliée par 1.55. Il ne s'agit là, selon l'expression même de M. Ph.-A. Guye (voir *Dict. de Würtz*, loc. cit.), que d'une approximation grossière et qui ne saurait convenir pour des calculs précis.

Le produit du coefficient de dilatation vraie par Θ est aussi une constante sensiblement si l'on considère les températures d'ébullition normales comme étant sensiblement correspondantes.

D'autre part, d'après Pawlewski, la différence entre la température critique absolue et la température absolue d'ébullition normale serait une constante sensiblement égale à 178°, etc. Ces lois empiriques, de même que les méthodes indirectes de détermination de Θ reposant sur l'étude des

B_4... les points relatifs aux densités de vapeur saturée correspondantes; les milieux I_1, I_2, I_3, I_4... des cordes A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4... *sont rigoureusement en ligne droite*, car ce travail ne se rapporte qu'aux corps qui obéissent à la loi du diamètre rectiligne, c'est-à-dire aux corps dont le poids moléculaire n'est pas fonction de la température (*).

Si l'on néglige les densités de vapeur saturée δ_1', δ_2', δ_3', δ_4'... au lieu du diamètre rectiligne, on observera un *diamètre curviligne* $J_1J_2J_3J_4$... dont le coefficient angulaire, pris en valeur absolue, augmentera rapidement en même temps que la température. La connaissance exacte du coefficient angulaire du diamètre rectiligne étant la base de tous les calculs qui vont suivre, on voit, conformément à ce qui a été dit page 6, qu'*il est absolument impossible de négliger la densité de la vapeur saturée devant celle du liquide, même aux basses températures.*

Géométriquement, la connaissance de Θ revient à couper le diamètre rectiligne $I_1I_2I_3I_4$... par une droite HK presque perpendiculaire à la première, ce qui définit admirablement le point K d'intersection et résout la question proposée, puisque $HK = \Delta$ et $a = \frac{\Theta}{\Delta} \operatorname{tg} \alpha$.

Mettons le problème en équations, il viendra :

$$(6)\quad \begin{cases} \dfrac{\delta_1 + \delta_1'}{2\Delta} = 1 + a\left(1 - \dfrac{T_1}{\Theta}\right), & \dfrac{\delta_2 + \delta_2'}{2\Delta} = 1 + a\left(1 - \dfrac{T_2}{\Theta}\right), \\ \dfrac{\delta_3 + \delta_3'}{2\Delta} = 1 + a\left(1 - \dfrac{T_3}{\Theta}\right), & \dfrac{\delta_4 + \delta_4'}{2\Delta} = 1 + a\left(1 - \dfrac{T_4}{\Theta}\right) \cdots \end{cases}$$

phénomènes capillaires faite loin du point critique, fournissent le plus souvent des valeurs par trop approximatives pour être employées avec sécurité.

Nous devons donc poser en principe que la température critique est un élément primordial qui peut servir à calculer les constantes du corps non accessibles à l'expérience directe, mais qu'on ne saurait connaître avec précision et certitude par des procédés indirects.

(*) Ou plus généralement dont la molécule a le même degré de polymérisation pour le liquide et la vapeur saturée à toutes les températures. (Voir Ph.-A. Guye, *Sur la polymérisation moléculaire des liquides.* Arch. de Genève, février 1894.)

cela peut s'écrire :

$$2\Delta = \frac{\delta_1 + \delta_1'}{1 + a\left(1 - \frac{T_1}{\Theta}\right)} = \frac{\delta_2 + \delta_2'}{1 + a\left(1 - \frac{T_2}{\Theta}\right)} = \frac{\delta_3 + \delta_3'}{1 + a\left(1 - \frac{T_3}{\Theta}\right)} = \cdots$$

ou encore, en utilisant les propriétés des rapports égaux,

$$(7)\quad a\frac{\Delta}{\Theta} = \frac{(\delta_1 + \delta_1') - (\delta_2 + \delta_2')}{2(t_2 - t_1)} = \frac{(\delta_2 + \delta_2') - (\delta_3 + \delta_3')}{2(t_3 - t_2)} = \cdots = \operatorname{tg}\alpha.$$

Les rapports égaux (7) ne sont autre chose que l'expression du coefficient angulaire des divers segments I_1I_2, I_2I_3, I_3I_4... du diamètre rectiligne, coefficient angulaire qui doit rester constant aux petites variations près provenant des erreurs expérimentales commises sur les densités de liquide. tg α étant connu, l'une quelconque des équations (6) et l'équation (2) constituent deux équations simultanées à deux inconnues Δ et a.

Effectuons cette résolution; elle donne

$$(8).\quad a = \frac{\Theta}{\frac{\delta_1 + \delta_1'}{2\operatorname{tg}\alpha} - (t_c - t_1)} = \frac{\Theta}{\frac{\delta_2 + \delta_2'}{2\operatorname{tg}\alpha} - (t_c - t_2)} = \cdots$$

On voit que le dénominateur de a est un véritable *invariant* dont chaque point du diamètre rectiligne donnera une valeur indépendante. Sa signification géométrique est simple. Reportons-nous à la figure 2 et appelons R le point d'intersection du diamètre rectiligne avec l'axe des abscisses; *le dénominateur de* a *n'est autre que* HR.

En effet,

$$\frac{\delta_1 + \delta_1'}{2\operatorname{tg}\alpha} = B_1R \qquad t_c - t_1 = \Theta - T_1 = B_1H$$

$$\frac{\delta_1 + \delta_1'}{2\operatorname{tg}\alpha} - (t_c - t_1) = HR.$$

Par suite,

$$a = \frac{OH}{HR}.$$

De la même façon, chacune des équations (6) fournira de Δ une valeur indépendante, connaissant a.

$$\Delta = \frac{1}{2} \frac{\delta_1 + \delta_1'}{1 + a \dfrac{t_c - t_1}{\Theta}}.$$

Géométriquement, cela revient à écrire

$$\Delta = KH = \frac{I_1B_1 \cdot HR}{B_1R},$$

c'est-à-dire que les triangles RI_1B_1 et RKH sont semblables.

Remarque. — Par la loi du diamètre rectiligne, la courbe des densités jouit d'une des propriétés de la parabole; lorsque a est égal à *un*, cette courbe jouit d'une seconde propriété de la parabole.

En effet, les deux tangentes rectangulaires menées de H à la courbe des densités touchent celle-ci l'une en K, l'autre en O; dès lors, la corde de contact est OK et, si l'on joint H au milieu L de cette corde, *on a bien une droite parallèle au diamètre rectiligne.*

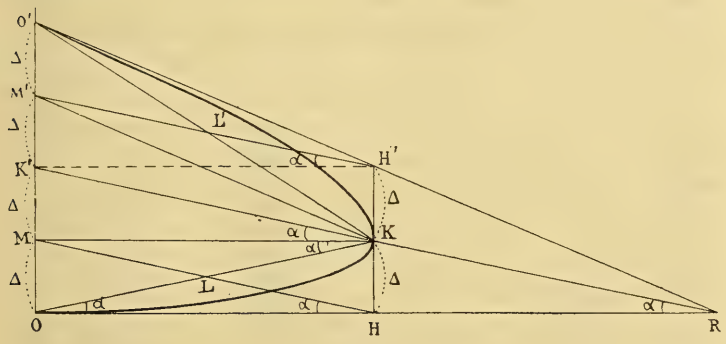


Fig. 3.

En effet, dans ce cas, H est le milieu de OR et la figure OMKH est un rectangle, tandis que K'KHM est un parallélogramme.

Considérons le point O′ symétrique de O par rapport à K′ et menons O′R ; on a HK = H′K = Δ et l'on voit que O′ est le point de contact de la droite OR et de la courbe des densités ; donc O′K est la corde des contacts des deux tangentes menées par H′ à la courbe des densités, et si l'on joint H′ au milieu L′ de la corde des contacts, *on obtient une droite* M′H′ *parallèle au diamètre rectiligne* KK′.

En effet, M′ étant le milieu de O′K′, la figure M′H′KK′ est un parallélogramme ; donc M′H′ est parallèle à KK′ ; d'autre part, O′H′KM′ est aussi un parallélogramme et M′H′ passe bien par le milieu de O′K.

Je dois la première remarque à l'amabilité de M. Simon ; la seconde m'est personnelle.

§ 5. Vérification des formules précédentes dans le cas du chlore. — Dans une étude extrêmement soignée sur les propriétés du chlore liquide, Knietsch (*) a déterminé, pour un grand nombre de températures inférieures à son point d'ébullition normale, la densité du chlore liquide en même temps qu'il mesurait la température critique de ce corps. Je me propose de contrôler la théorie précédente par son application aux nombres de Knietsch. Je constaterai d'abord la constance de tg α, puis celle de a, puis celle de Δ.

t	δ	δ (Calc.)	$\frac{\delta + \delta'}{2}$	$\frac{\delta + \delta'}{2}$ (Calc.)
—80°	1.6602	0 00057	0 85028	admis
—75	1 6490	52	0 82476	0.82490
—70	1 6382	68	0.81944	0.81952
—65	1 6273	88	0.81409	0.81415
—60	1 6167	0.00117	0.80893	0 80877
—55	1 6055	132	0 80351	0 80339
—50	1.5945	185	0.79817	0.79801
—45	1.5830	224	0 79262	0.79263
—40	1 5720	270	0 78735	0 78726
—35	1.5598 (**)	350	0.78165	0 78188
—30	1 5485	449	0.77650	admis

(*) R. Knietsch, *Liebig's Annalen*, t. CCLIX, p. 100 ; 1890

(**) Dans le mémoire on lit 1.5589, nombre visiblement mauvais quand on considère la marche des différences premières de δ. Il y a eu, très probablement, transposition des chiffres 8 et 9 par la faute du compositeur.

Les δ du tableau précédent sont ceux qui figurent page 124 du tome CCLIX des *Liebig's Annalen;* quant aux δ', ils ont été calculés par la formule

$$\delta' = \frac{0.0012952 \times 2.4865 \times 273}{T} \cdot \frac{h}{760},$$

dans laquelle 2.4865 est la densité de vapeur du chlore déterminée récemment par M. Leduc (*) et h la pression de vapeur saturée en millimètres de mercure figurant page 104 et page 108 du tome cité plus haut. Les températures *réduites* étant inférieures à 0.58, il a été inutile d'introduire de facteur de correction k de la page 6.

Les nombres de la dernière colonne ont été calculés par la formule

$$\frac{\delta + \delta'}{2} = 0.83028 - 0.0010756\,(t + 80).$$

La constance de tg α ressort de l'accord remarquable des deux dernières colonnes du tableau. Avec une approximation d'un ordre très élevé, on a donc

$$\text{tg}\,\alpha = 0.0010756.$$

La constance de a et de Δ ressort du tableau suivant :

t	$\frac{\delta + \delta'}{2\,\text{tg}\,\alpha} - (t_c - t)$	$a = \frac{\Theta}{\frac{\delta + \delta'}{2\,\text{tg}\,\alpha} - (t_c - t)}$	$\Delta = \frac{\frac{\delta + \delta'}{2}}{1 + a(1-m)}$
—80°	545.92	0.7675	0.58718
—75	545.79	0.7677	0.58711
—70	545.84	0.7676	0.58713
—65	545.87	0.7676	0.58715
—60	546.07	0.7675	0.58729
—55	546.03	0.7674	0.58728
—50	546.07	0.7675	0.58730
—45	545.91	0.7675	0.58717
—40	546.01	0.7674	0.58727
—35	545.71	0.7678	0.58702
—30	545.92	0.7675	0.58719
	Moyenne	= 0.7675	= 0.58719

(*) A. Leduc, *Comptes rendus*, t. CXVI, p. 968; 1893.

On ne peut nier que la constance de a ne soit remarquable, les nombres extrêmes ne différant de la moyenne 0.7675 que de $\frac{1}{2500}$ environ.

L'exemple précédent prouve que a *peut être très différent de l'unité.*

Quant à Δ, sa constance est encore plus parfaite que celle de a; si l'on met de côté le nombre relatif à la température de —35° qui comporte une légère incertitude, comme on l'a vu, et qui diffère de la moyenne 0.58719 d'environ $\frac{1}{3154}$; tous les autres nombres ne diffèrent de cette moyenne que de quantités inférieures à $\frac{1}{5000}$.

Dans ces conditions, on peut dire que la vérification des formules (6) et (8) est parfaite, et l'on peut admettre pour le chlore

$$a = 0.7675, \qquad \Delta = 0.5872.$$

La vérification des équations (6), (7), (8) est un critérium extrêmement sensible de la précision avec laquelle ont été mesurées les densités de liquide δ; pour que cette vérification soit possible, il faut évidemment que les densités utilisées se rapportent au même échantillon du corps. On ne pourra pas, en général, utiliser des mesures de densité faites par des expérimentateurs différents; l'inconvénient est moindre en ce qui concerne la température critique.

Les densités de vapeur saturée étant, le plus souvent, calculées par défaut, la valeur calculée pour tg α sera alors légèrement par excès; dès lors le dénominateur de a sera trop petit et a sera connu *par excès*. Il en sera ainsi si, pour $m > 0.57$ ou 0.58, on néglige le facteur de correction k et, *a fortiori*, si l'on néglige la densité de vapeur saturée devant celle du liquide. On ne peut opérer, dans ce dernier cas, qu'en utilisant les densités de liquide observées au voisinage du point de solidification (m voisin de 0.50), circonstance fâcheuse, car des perturbations peuvent apparaître alors dans la densité du liquide et empêcher la vérification de la loi du diamètre rectiligne, représentée par la constance de tg α.

Les ammoniaques composées, en particulier, présentent ce phénomène d'avoir, à basse température, une densité de liquide dont le coefficient angulaire, pris en valeur absolue, *augmente à mesure que la température baisse* (*). Il est à peine besoin de dire que, dans ces conditions, les formules (6), (7), (8) ne sont pas applicables.

Lorsque cela est possible, il est donc préférable d'utiliser les densités relatives aux températures voisines du point d'ébullition normale qui ne présentent généralement pas cette irrégularité.

(*) Ce phénomène est très net sur les propylamines (mono-, bi-, tri-), dont les densités ont été prises par Chancel en partant de produits purs bien cristallisés (*Chemical Society*). De même pour les éthylamines (mono-, bi-, tri-) (Beilstein, *Handbuch der organischen Chemie*).

Je remercie M. Duvillier, professeur à la Faculté des Sciences de Marseille, qui a bien voulu me signaler ces mesures de densité de liquide.

§ 6. Examen des valeurs de a. — J'ai rassemblé dans les tableaux suivants un certain nombre des valeurs de a obtenues soit au moyen de la courbe des densités, soit par l'emploi des formules (6), (7), (8).

Valeurs de a *tirées de la courbe des densités.*

Corps.	a	Expérimentateurs.
Acide sulfureux	1.0334	Cailletet et Mathias
Éthylène	1.060	id
Acide carbonique	0.858	Amagat
Sulfure de carbone	0.9537	Battelli.
Benzine	0.9359	S. Young.
Benzine monofluorée. . . .	0.9165	id.
Id. chlorée . . .	0.9557	id.
Id. bromée . . .	0.9639	id
Id iodée	0.9572	id
Tétrachlorure de carbone . .	0 9181	id.
Id. d'étain . . .	0 9945	id.
Acide acétique	0.9647	id.
Éther	0.9600	id.
Isopentane	0.8923	id.
Pentane normal	0.9307	id
Hexane id.	0.9666	id
Heptane id.	1.0135	id.
Formiate de méthyle. . . .	0.997	S Young et G.-L. Thomas.
Id. éthyle	1.021	id.
Id propyle	1.025	id.
Acétate de méthyle	1.049	id.
Id. éthyle	1.061	id.
Id propyle	1.088	id.
Propionate de méthyle . . .	1.055	id.
Id. éthyle. . . .	1.090	id.
Butyrate de méthyle	1.074	id.
Isobutyrate de méthyle . . .	1.045	id.

Résultats obtenus au moyen des formules (6), (7) et (8).

Corps.	t	δ_t	tg α	a	Δ
Décane normal.	0°	0.7452		0.9273	0.2471
Id	15	0.7342	0.000380	0.9280	0.2472
Id.	20	0.7304		0.9280	0.2472
Id.	99,3	0.6690		0.9273	0.2471
				Moy. = 0.9277	Moy. = 0 24715
	— 20°	0.6607		1.005	0.241
	— 15,75	0.6557		1.004	0.241
	— 10	0.6492		1.002	0.241
Ammoniaque	— 5	0.6429	0.000600	1.0015	0.241
d'après	0	0.6364		1.001	0.241
Andréeff.	+ 5	0.6298		1.001	0.241
	+ 10	0.6230		1.001	0.241
	+ 20	0.6089		1.002	0.241
				Moy. = 1.002	Moy. = 0.241
Azote	—202°	0.866	0.001787	0.6813	0.3331
d'après Wroblewski.	—193	0.830		0.6813	0.3331
	—195	1.2240		0.8014	0.4381
Oxygène	—190	1.2028		0.7996	0.4388
d'après	—185	1.1790	0.002264	0.7995	0.4388
Wroblewski.	—180	1.1525		0.7996	0.4388
	—175	1.1254		0.7996	0.4388
				Moy. = 0.8000	Moy. = 0.4387
	0°	3.1875		0.8965	1.0835
	10	3.1542		0.8964	1.0837
Brome	20	3.1204		0.8962	1.0838
d'après	30	3.0862	0.0016887	0.8962	1.0837
Is. Pierre.	40	3.0514		0.8964	1.0836
	50	3.0160		0.8965	1.0835
	60	2.9800		0.8965	1.0835
				Moy. = 0.8964	Moy. = 1.0836

Les tableaux précédents prouvent, de toute évidence, que *a* n'est pas constant, cette quantité variant depuis 0.68 (azote) jusqu'à 1.09 (propionate d'éthyle); par conséquent, *les lois des états correspondants ne s'appliquent pas rigoureusement aux diamètres rectilignes des courbes des densités.*

Si les lois des états correspondants ne s'appliquent pas à tous les diamètres rectilignes *pris en bloc,* peut-on former des *groupes naturels* de corps, groupes caractérisés par une valeur quasi constante de *a* et dans l'intérieur desquels s'appliquerait le théorème de M. Van der Waals? (*) De tels groupes devraient, ce semble, comprendre nécessairement les *séries homologues* de la chimie organique. Or, si l'on étudie la marche des valeurs de *a* dans de pareilles séries, on constate, comme MM. Young et Thomas l'ont remarqué les premiers (**), que *a* croît avec le poids de la molécule, mais dépend en même temps de la constitution de la molécule. Ainsi, des corps isomères n'ont pas la même valeur de *a*, en général; de deux isomères, l'un *normal*, l'autre non normal, le premier a un *a* plus grand que le second. A ce point de vue, on peut dire que, dans une certaine mesure, *a* suit à peu près les fluctuations du point d'ébullition normale et par suite, d'après la loi empirique de Pawlewski, les mêmes fluctuations que la température critique.

D'autre part, les exemples du valérianate d'éthyle et du décane normal portent à penser que *a* ne croît pas indéfiniment avec le poids de la molécule dans une même série homologue, et qu'il y a peut-être, à un certain moment, *rétrogradation* de cette quantité.

On peut remarquer aussi que mes calculs démontrent que *les corps simples gazeux (oxygène, azote, chlore, brome) sont ceux qui présentent les plus petites valeurs de* a. Pour le chlore et pour le brome, ces valeurs sont presque exactement proportionnelles aux températures critiques absolues; pour l'oxygène et l'azote, qui ne sont pas chimiquement comparables, la proportionnalité est simplement approchée.

(*) Solution que j'ai proposée dans un mémoire antérieur en m'appuyant sur les mesures expérimentales de M. S. Young.

(**) S. Young et G.-L. Thomas, *Trans. chem. Soc.*, 1893.

Il résulte de ce qui précède que, dans l'intérieur des séries homologues de la chimie organique, a n'est pas constant, même pour des séries de corps *normaux;* par conséquent, *les groupes devront simplement être définis par la condition que* a *varie le moins possible et oscille autour d'une valeur moyenne qui caractérisera le groupe.*

La formation des groupes comporte nécessairement un assez grand degré d'arbitraire, le peu que nous connaissons des valeurs de a paraissant démontrer que cette quantité peut avoir toutes les valeurs possibles, depuis 0.5 jusqu'à une limite supérieure plus grande que 1.10, mais impossible à préciser actuellement, sans qu'il y ait à aucun moment de coupure annonçant le commencement ou la fin d'un groupe naturel.

Il convient encore de remarquer que, dans la formule du diamètre rectiligne, a est multiplié par $1-m$; au voisinage immédiat de la température critique, $1-m$ est petit par rapport à l'unité; par suite, pour des corps que l'on compare à des températures correspondantes, les variations de a ont d'autant moins d'importance que m est plus voisin de *un.* Pratiquement, sinon théoriquement, *les différents diamètres rectilignes seront comparables au voisinage de la température critique, et cette comparabilité sera limitée à un intervalle d'autant plus grand que les valeurs de* a *seront moins différentes* (*).

(*) Les formules qui m'ont servi autrefois pour démontrer que le théorème des états correspondants s'applique aux densités de liquide et de vapeur saturée avaient précisément ce mérite, malgré leur empirisme, de montrer la vraie signification du théorème de Van der Waals.

En effet, d'une part, elles ne s'appliquaient qu'entre $m = 0.85$ ou $m = 0.80$ et $m = 1$, c'est-à-dire pour de faibles valeurs de $1-m$ et, d'autre part, elles étaient flexibles en ce sens qu'elles admettaient de petites variations des coefficients numériques qui y entrent Ces variations correspondent à celles de a et il en résulte que chacune des deux formules, tout en restant à peu près identique à elle-même, peut représenter très convenablement la variation de densité des corps les plus variés dans un intervalle de température assez considérable.

§ 7. Remarques sur le travail de M. Amagat. — Chercher une démonstration précise du théorème des états correspondants sur des corps quelconques, lorsque, comme dans le cas des courbes de compressibilité, on réunit sur une même isotherme les états liquide et gazeux, c'est ce que s'est proposé M. Amagat dans le travail cité à la page 4 de ce mémoire. On ne peut nier qu'avec sa manière de faire M. Amagat n'ait obtenu des superpositions de courbes fort satisfaisantes et n'ait démontré aux plus réfractaires à quel point sont exactes les idées de correspondance introduites dans la science par le génie de Van der Waals. Au point de vue *qualitatif*, la vérification d'ensemble obtenue par M. Amagat sans donner prise aux deux sortes de critiques exposées au début de ce travail est une chose consacrée.

Il en est de même de tous les raisonnements fondés sur la superposition, supposée parfaite, de ses réseaux et qui fournissent des procédés fort commodes pour retrouver et pour démontrer de façon très générale certaines propositions relatives aux états correspondants.

Mais si l'on se rappelle que les expériences de M. S. Young prouvent qu'*aux températures correspondantes* le théorème de Van der Waals s'applique d'une manière presque parfaite aux densités de liquide et beaucoup moins bien aux vapeurs saturées (*), on en déduira que si l'on fait coïncider par le procédé de M. Amagat les branches des courbes des densités relatives à l'état liquide, les diamètres rectilignes ne coïncidant pas en général, *les courbes relatives à la vapeur saturée ne coïncideront pas, sauf au voisinage immédiat de la température critique.*

En d'autres termes, l'expérience montre que *la comparabilité des corps, en ce qui concerne les états correspondants, dépend essentiellement de l'état de la matière que l'on compare;* autre chose est de comparer des liquides, autre chose est de comparer des vapeurs saturées, autre chose est de comparer des états gazeux presque parfaits.

(*) S. Young, On the generalizations of Van der Waals. *Phil. Mag.* [5], t. XXXIII, p. 153; tableaux XIII et XV; 1892.

La détermination des constantes critiques donnée par M. Amagat comme conséquence de sa démonstration du théorème de M. Van der Waals suppose deux choses : 1° l'exactitude des constantes critiques de l'acide carbonique; 2° la superposition supposée parfaite des réseaux.

On peut tenir pour exactes, à un haut degré d'approximation, les constantes critiques données par M. Amagat pour l'acide carbonique — j'aurai probablement occasion d'en faire la preuve. Mais la seconde supposition n'est pas admissible, *la superposition des réseaux ne pouvant être, en toute rigueur, qu'une approximation.*

Il suit de là que la méthode *peut* fournir des constantes critiques erronées.

Le tableau suivant reproduit les constantes déterminées ainsi :

	Acide carbonique.	Éthylène.	Éther.	Air.
Température critique . .	+ 31°,35	+ 8°,8	+ 195°	— 140°,7
Pression id . .	$72^{atm.}9$	$48^{atm.}5$	$36^{atm.}5$	$35^{atm.}9$
Densité id . .	0.464	0.212	0.253	0.344

Les températures critiques de l'éther et de l'air sont acceptables, mais on doit trouver trop basse la température critique de l'éthylène. Toutes les déterminations directes de cette quantité sont plus grandes que le nombre fourni par la méthode de M. Amagat, et les déterminations récentes (J. Dewar, P. Villard) fournissent des nombres très voisins de + 10°.

De même, la pression critique de l'éthylène est beaucoup plus basse que les pressions trouvées par J. Dewar et surtout Van der Waals ($58^{atm.}$). Si l'on se rappelle que c'est en adoptant les valeurs expérimentales de la température et de la pression critiques trouvées par Van der Waals que Baynes (*) a

(*) Baynes, *Nature*, t. XXII. p. 186; 1880. Voir aussi Van der Waals, *Continuité, etc.*, trad. Dommer et Pomey, p. 146.

déterminé les deux constantes de l'équation caractéristique de l'éthylène qui, pour la température de + 20°, donne un accord si admirable avec les mesures expérimentales de M. Amagat, on peut se demander comment les lois des états correspondants ont pu fournir à ce dernier physicien une valeur aussi basse de la pression critique de l'éthylène.

Par contre, la pression critique de l'éther est nettement plus forte que les valeurs remarquablement concordantes

$35^{atm}.77$	A. Battelli, 1889
35 . 65	Ramsay et Young, 1886
35 . 60	S Young, 1892

fournies par les meilleurs expérimentateurs. Les isothermes de MM. Ramsay et Young, *relatives à l'éther qui avait donné directement* $\pi = 35^{atm}.65$, ont fourni à M. Amagat $\pi = 36^{atm}.5$, soit une différence d'environ 3 %.

Des trois densités critiques de l'éthylène, de l'éther et de l'air, la première est pour ainsi dire identique à celle que M. Cailletet et moi donnions dès 1886. On sait, d'autre part, que l'air se liquéfie comme un corps simple, sans changer de composition d'une façon appréciable; sa densité critique doit donc pouvoir, assez exactement, se calculer en écrivant que le volume de l'air liquide est égal à la somme des volumes de l'oxygène et de l'azote liquides.

On a vu, par ce qui précède, que la loi du diamètre rectiligne appliquée à l'oxygène et à l'azote, fournit pour ces corps les densités critiques

0.3331.	azote
0.4387.	oxygène,

d'où, par suite,

$$\frac{0.23}{0.4387} + \frac{0.77}{0.3331} = \frac{1}{\Delta},$$

$$\Delta = \frac{0.4587 \times 0.3331}{0.23 \times 0.3331 + 0.77 \times 0.4387} = 0.353.$$

On obtient ainsi un résultat sensiblement plus grand que celui de M. Amagat; toutefois, en raison des difficultés que l'on rencontre dans la mesure des densités de l'oxygène et de l'azote liquides, ont doit suspendre son jugement, la différence entre les nombres 0.344 et 0.353 n'étant que de 2.5 °/₀.

Mais pour ce qui est de l'éther, corps régulier très bien étudié par plusieurs expérimentateurs, *la densité critique 0.253 trouvée par M. Amagat est tout à fait inacceptable.* En effet, les expériences si précises de M. Young fournissent, par la méthode du diamètre rectiligne, *aussi bien par les températures correspondantes que par les pressions correspondantes* (*), le nombre 0.2631. D'autre part, les expériences assurément moins précises d'Avénarius montrent que les deux premiers chiffres significatifs de Δ sont bien 0.26 (**); il s'ensuit que le nombre 0.253 est erroné d'environ 4 °/₀ par défaut.

Si l'on remarque que la détermination des constantes critiques par la superposition des réseaux d'isothermes utilise un nombre énorme d'expériences faites dans des conditions très diverses de température et de pression, qu'on est maître de chercher la coïncidence la meilleure, etc.; si l'on joint à cela l'habileté expérimentale consommée de M. Amagat, il ne paraîtra pas excessif de demander au résultat attendu une précision plus grande que celle des expériences isolées, le *millième* par exemple. Au lieu de cela, on voit, au milieu de résultats exacts, des erreurs tantôt par défaut, tantôt par excès, *et atteignant plusieurs centièmes*, sans qu'il y ait aucune règle apparente dans la répartition de ces erreurs.

On peut se demander, pour expliquer ces faits, si le choix de l'acide carbonique comme corps de comparaison a été heureux.

Les tableaux des valeurs de a montrent qu'au point de vue des densités, un seul corps de comparaison ne saurait convenir. La constante $a = 0.858$ de l'acide carbonique est beaucoup plus faible que celle de la plupart des corps organiques; à ce point

(*) E. Mathias, *Sur la densité critique*, pp. 3 et 5.

(**) Ibid., *Remarques sur le théorème des états correspondants*, p. 17.

de vue, l'acide carbonique n'est pas très comparable à l'éther; mais il est encore moins comparable à l'éthylène pour lequel $a = 1.060$. Cependant, M. Amagat a trouvé pour la densité critique de l'éthylène un nombre correct, tandis qu'il a trouvé un nombre trop faible pour l'éther.

Le choix de l'acide carbonique comme corps de comparaison n'est donc pas une explication suffisante (*).

La cause d'erreur est dans la méthode elle-même qui suppose rigoureuse la superposition des réseaux alors que celle-ci est théoriquement impossible. On ne peut pratiquement obtenir qu'une superposition plus ou moins satisfaisante à l'œil, *mais qui n'est jamais qu'une superposition apparente.*

Cette superposition apparente, qui donne à la méthode de M. Amagat l'illusion d'une démonstration rigoureuse, est précisément ce qui fait sa valeur *au point de vue de l'enseignement;* mais cette illusion même est un danger.

Il est dangereux de considérer les lois des états correspondants comme démontrées rigoureusement, et de les utiliser, sans précautions particulières, à la détermination précise des constantes critiques (**). Elles ne fournissent en général que des valeurs approchées à quelques centièmes près, ce qui donne bien l'ordre de grandeur de ces valeurs, mais ne saurait suffire dans l'état actuel de la science; le présent travail en est la preuve en ce qui concerne la densité critique.

(*) On pourrait, à d'autres points de vue, retrouver la même difficulté. Ainsi, au point de vue de la comparaison des chaleurs de vaporisation par les états correspondants, *l'acide carbonique n'est pas dans le même groupe que l'éther,* groupe qui renferme un grand nombre de corps organiques dérivés des carbures ou des acides gras (voir Darzens, *C. R.*, t. CXXIV, p. 610; 1897).

(**) M. le professeur S. Young, de Bristol, a bien voulu me confirmer, en septembre dernier, l'impossibilité pour lui démontrée maintenant, de la détermination expérimentale directe de la densité critique d'un corps. Il faut donc nécessairement passer par l'intermédiaire de la loi du diamètre rectiligne pour définir et obtenir d'une façon précise cette quantité.

RECHERCHES ANATOMIQUES

SUR

L'EMBRYON ET LES PLANTULES

DANS LA FAMILLE DES RENONCULACÉES

PAR

R. STERCKX

DOCTEUR EN SCIENCES NATURELLES
LAURÉAT DES CONCOURS UNIVERSITAIRES
PROFESSEUR A L'ÉCOLE NORMALE DE L'ÉTAT, A MONS.

INTRODUCTION

Dans ces recherches anatomiques sur l'embryon et les plantules dans la famille des Renonculacées, j'ai choisi pour chaque genre un certain nombre d'espèces, de façon à rencontrer les structures diverses de l'embryon et des cotylédons, les différents modes de germination, ainsi que les principales formes d'adaptation. Pour chaque stade de la germination, il a été fait une étude complète par la méthode des coupes transversales successives, mais j'ai surtout porté mon attention sur certains niveaux bien définis, comme le milieu de l'hypocotyle, le nœud cotylédonaire et la région du contact de l'hypocotyle avec la racine principale. J'ai étudié aussi la structure des appendices, de la tige principale et des racines. Les plantules ont été incluses à la celloïdine et sectionnées au microtome. Les coupes, fixées au porte-objet par l'agar-agar (1), ont été éclaircies par l'eau de javelle et montées à la gélatine glycérinée.

(1) Ce procédé de fixation, employé avec succès depuis quelques années à l'Institut botanique de Liége, a été expliqué par M. le professeur Gravis dans le *Bulletin de la Société belge de microscopie*, t. XXIII, 1897.

J'ai divisé l'exposé de mes recherches en trois parties :

1° Description d'un type : le *Nigella damascena;*

2° Description des autres espèces;

3° Résumé des résultats obtenus, historique du sujet et conclusions.

Je me fais un devoir de présenter à M. le professeur Gravis mes respectueux remerciements pour les conseils qu'il n'a cessé de me donner au cours de ce travail et pour les nombreux matériaux d'étude qu'il a bien voulu mettre à ma disposition.

RECHERCHES ANATOMIQUES

SUR

L'EMBRYON ET LES PLANTULES

DANS LA FAMILLE DES RENONCULACÉES

PREMIÈRE PARTIE

NIGELLA DAMASCENA

I. — L'EMBRYON DANS LA GRAINE MURE.

CARACTÈRES EXTÉRIEURS.

Dans l'angle supérieur de l'akène du *Nigella damascena*, un peu moins obtus que l'inférieur, on trouve, dans un albumen abondant et dur, un embryon mesurant $1^{mm},5$ de longueur sur $0^{mm},5$ de largeur, droit, dont les cotylédons ont leur surface parallèle aux faces latérales de l'akène.

Le plan qui passe par le milieu de l'hypocotyle, perpendiculairement à la surface de chaque cotylédon, est appelé *plan principal de symétrie*.

STRUCTURE.

Coupes transversales.

A. Coiffe. — A quelque distance de l'extrémité inférieure de l'embryon, la coupe montre des cellules à section polygonale (fig. 1); celles du centre appartiennent au calyptrogène; celles de la périphérie font partie de la coiffe.

B. Radicule. — Quelques coupes plus haut, on voit, de l'extérieur vers l'intérieur (fig. 2) :

1° La *coiffe*, comprenant à ce niveau deux couches cellulaires;

2° Le *parenchyme cortical*, constitué par huit assises de cellules disposées radialement. Endoderme non caractérisé;

3° Le *faisceau procambial*, dont le diamètre mesure un peu moins que le tiers du diamètre total de la coupe. Péricycle très net. Procambium.

La dernière coupe dans la radicule (fig. 3) montre à la surface, à côté des cellules de la coiffe, des éléments allongés dans le sens radial et recouverts extérieurement d'une légère cuticule : ce sont des cellules épidermiques appartenant à l'hypocotyle. A ce niveau, la coupe traverse donc la région qui sépare la radicule de l'hypocotyle : c'est ici que l'épiderme de l'hypocotyle se divise tangentiellement en deux couches, dont l'extérieure fait partie de la coiffe et dont l'intérieure devient pilifère après la chute de la coiffe. Cette région du contact de la coiffe avec l'épiderme est le *collet superficiel* de l'embryon.

C. Milieu de l'hypocotyle (fig. 4). — On y trouve, de la circonférence au centre :

1° L'*épiderme*;

2° Le *parenchyme cortical*, identique à celui de la radicule, sauf qu'il renferme une ou deux assises en plus et que ses cellules sont plus larges;

3° Le *faisceau procambial*, dont le diamètre ne mesure que le cinquième du diamètre total de la coupe.

D. Région d'insertion des cotylédons. — Une coupe pratiquée à la base du nœud cotylédonaire montre la même structure, sauf que le parenchyme cortical est moins épais et le cylindre central plus large.

Plus haut, le faisceau procambial se dédouble ; chaque moitié représente un faisceau procambial cotylédonaire (fig. 5), qui vient s'insérer à ce niveau sur le cylindre procambial de l'hypocotyle. Ces deux faisceaux sont situés dans le plan principal de symétrie et séparés l'un de l'autre par le méristème primitif de la tige principale : cette région d'insertion des cotylédons est le *collet interne*.

E. Milieu des cotylédons. — Une coupe vers le milieu d'un cotylédon (fig. 6) montre trois faisceaux à l'état procambial.

Coupe longitudinale (fig. 7).

A. Coiffe. — Vers le sommet de l'embryon, l'épiderme de l'hypocotyle se dédouble tangentiellement. A mesure que l'on descend, ces deux couches cellulaires sont remplacées par trois, quatre, etc., assises semblables formant la coiffe. Vers l'intérieur se trouve le calyptrogène, dont les cellules se recloisonnent activement dans le sens tangentiel. A l'extrémité inférieure de l'embryon se voient les traces du suspenseur.

B. Radicule. — 1° La *coiffe ;*

2° Le *parenchyme cortical,* présentant à sa base deux cellules initiales, dont l'extérieure semble donner naissance à une seule couche, tandis que l'intérieure produit en se cloisonnant les files radiales observées sur les coupes transversales ;

3° Le *cylindre central,* terminé inférieurement par les initiales du faisceau de la racine principale.

C. Milieu de l'hypocotyle. — 1° L'*épiderme ;*

2° Le *parenchyme cortical.* Il atteint en cet endroit son maximum d'épaisseur ;

3° Le *cylindre central,* dont les cellules sont allongées dans le sens de l'axe.

D. Région d'insertion des cotylédons. — Les deux faisceaux destinés aux cotylédons s'insèrent obliquement sur le faisceau procambial de l'axe.

Le parenchyme cortical devient de moins en moins épais, et se continue avec celui des cotylédons.

L'épiderme est en continuation directe avec celui des cotylédons.

Entre les faisceaux cotylédonaires se trouve le méristème primitif de la tige principale. Il est recouvert par le dermatogène, qui se continue avec l'épiderme des cotylédons.

II. — LES PLANTULES.

CARACTÈRES EXTÉRIEURS.

La germination du *Nigella damascena* peut se diviser en six stades :

1° *Apparition de la radicule au dehors* (fig. 8);

2° *Sortie de la racine principale* (fig. 9). — On reconnaît la racine principale aux nombreuses papilles qui la recouvrent. L'hypocotyle a une surface nue, lisse, luisante, et présente une courbure à angle droit. Les cotylédons sont encore emprisonnés dans le spermoderme et absorbent l'albumen;

3° *Hypocotyle en nutation* (fig. 10). — La racine principale mesure 15 millimètres et l'hypocotyle 12. Les cotylédons commencent à se dégager;

4° *Cotylédons dégagés du spermoderme, mais non encore étalés* (fig. 11). — La longueur de la racine principale est de 2 centimètres environ; celle de l'hypocotyle varie entre 1 et 4 ou 5 centimètres, selon la profondeur à laquelle la graine a été enterrée et les conditions d'éclairage dans lesquelles elle a germé. Il est en partie souterrain. Une radicelle s'est développée sur la racine principale;

5° *Cotylédons complètement développés* (fig. 12). — La racine principale est longue de 3 à 4 centimètres et porte plusieurs radicelles. Les cotylédons verdissent et se comportent comme de véritables feuilles;

6° *Développement des premières feuilles* (fig. 13).

§ 1. — HYPOCOTYLE.

A. — *Structure au milieu de l'hypocotyle.*

Dès le début de la germination s'opère la différenciation des pôles libériens aux extrémités du diamètre perpendiculaire au plan principal de symétrie (fig. 14). Puis une première trachée

se montre à chaque pôle ligneux (fig. 15). D'autres trachées apparaissent ensuite dans une direction centripète, en même temps que les éléments libériens se multiplient, que le cambium s'ébauche et que le péricycle se divise tangentiellement (fig. 16 et 17). A l'époque où les premières feuilles se développent, les deux pôles ligneux se rejoignent au centre, l'endoderme est recloisonné radialement, le cambium fonctionne et un cambiforme issu du recloisonnement du péricycle complète la zone génératrice (fig. 18 et 19).

B. — *Structure dans la région inférieure de l'hypocotyle. Rapports de l'hypocotyle avec la racine principale.*

1° *Faisceau central de l'hypocotyle.* — Il est en continuation directe avec celui de la racine;

2° *Parenchyme cortical de l'hypocotyle.* — Le parenchyme cortical de l'hypocotyle, y compris l'endoderme, se prolonge directement dans le parenchyme cortical de la racine;

3° *Surface de l'hypocotyle.* — Elle est nettement séparée de la racine. Au niveau du collet superficiel, l'épiderme est remplacé par une assise pilifère. Ce fait est dû à un dédoublement tangentiel des cellules épidermiques, à la suite duquel les cellules externes tombent et laissent à nu les cellules internes qui s'allongent en papilles vers l'extérieur pour constituer l'assise pilifère. Une même coupe dans le collet superficiel peut traverser à la fois la base de l'hypocotyle et le haut de la racine, et montrer à sa surface des cellules épidermiques à côté de cellules pilifères (fig. 20). C'est à ce niveau que les cellules épidermiques se dédoublent tangentiellement. (Voir la coupe longitudinale de l'embryon et fig. 21.)

C. — *Structure dans la région d'insertion des cotylédons.*

Pour exposer la structure de l'hypocotyle dans la région d'insertion, je considère les plantules à trois périodes de leur développement.

Première période. — Depuis le début de la germination jusqu'au moment où les cotylédons commencent à se dégager du spermoderme.

Deuxième période. — Depuis le moment où les cotylédons commencent à se dégager jusqu'au moment où ils vont s'épanouir.

Troisième période. — Développement des premières feuilles.

Pour chaque période, j'examine trois niveaux différents :

Premier niveau. — En dessous du nœud cotylédonaire.

Deuxième niveau. — Moitié inférieure du nœud cotylédonaire.

Troisième niveau. — Moitié supérieure du nœud cotylédonaire.

PREMIÈRE PÉRIODE.

Premier niveau (fig. 22, A). — 1 à 2 millimètres en dessous du nœud cotylédonaire, le diamètre du faisceau central est sensiblement allongé dans le sens antéro-postérieur. De chaque côté du plan principal de symétrie existent deux petits massifs libériens qui, plus bas, s'insèrent sur le liber de l'hypocotyle (fig. 25). Une trachée s'est développée contre chaque pôle centripète. Ces trachées appartiennent au faisceau médian cotylédonaire et sont en rapport à ce niveau avec le bois de l'hypocotyle : ainsi s'établit le *contact des faisceaux médians cotylédonaires avec le bois de l'hypocotyle.*

Deuxième niveau (fig. 22, B). — A mesure que l'on se rapproche du nœud cotylédonaire, les massifs de liber se portent vers le faisceau médian cotylédonaire. En dedans de ces massifs on voit, à l'état procambial, le bois des faisceaux latéraux cotylédonaires.

Plus haut, d'autres trachées cotylédonaires apparaissent dans le faisceau médian, tandis que les trachées des pôles centripètes s'éteignent (fig. 26 à 29). Des coupes longitudinales selon le plan de symétrie rendent compte de la manière dont se fait cette mise en rapport des premières trachées cotylédonaires avec celles de l'hypocotyle (fig. 30).

Troisième niveau (fig. 22, C). — Au nœud cotylédonaire, les trachées et le liber sortent dans les pétioles. Le faisceau ainsi constitué est donc une anastomose de trois faisceaux : un médian (M) différencié et deux latéraux (L, L) dont le bois est encore à l'état de procambium. Ceux-ci envoient peu après leur sortie de l'hypocotyle deux faisceaux marginaux (*m*) au stade procambial, déjà remarqués dans l'embryon et dont l'un est représenté dans la figure 31 (1).

DEUXIÈME PÉRIODE.

Premier niveau (fig. 23, A). — Chaque pôle ligneux centripète comprend un assez grand nombre d'éléments en dehors desquels on retrouve les trachées du médian cotylédonaire. Sur les côtés de chacun de ces pôles, les massifs procambiaux vus à la période précédente se différencient et leurs trachées s'appliquent contre celles du bois centripète : ainsi s'établit le *contact des faisceaux latéraux cotylédonaires avec le bois de l'hypocotyle* (fig. 35 à 40).

(1) Des coupes transversales successives dans une graine en germination prise tout au début de la première période, c'est-à-dire un peu avant qu'elle ait acquis la structure représentée par la figure 22, montrent :

1° Au milieu de l'hypocotyle, une trachée et un élément libérien à chaque pôle (fig. 15) ;

2° En dessous du premier niveau, pas de trachée ; à chaque pôle libérien, trois à cinq éléments parmi lesquels plusieurs appartiennent aux cotylédons et sont en contact à ce niveau avec le liber de l'hypocotyle (fig. 32) ;

3° Au premier niveau, pas de trachée ; de chaque côté du plan principal de symétrie, deux petits massifs libériens cotylédonaires (fig. 33) ;

4° Dans le faisceau cotylédonaire, pas de trachée ; deux petits massifs d'éléments dans le liber (fig. 34).

On en conclut que :

a) La mise en rapport du liber cotylédonaire avec le liber de l'hypocotyle s'opère avant la mise en rapport du bois cotylédonaire avec le bois de l'hypocotyle ;

b) Les faisceaux cotylédonaires ne se développent pas sous l'influence du faisceau de l'hypocotyle ; ils différencient leur bois après ce dernier ; ils n'en sont pas la continuation.

De chaque côté du plan principal de symétrie, les faisceaux caulinaires existent à l'état procambial (fig. 41).

Deuxième niveau (fig. 23, B). — Au nœud cotylédonaire, les latéraux cotylédonaires modifient leur orientation, s'accolent presque l'un à l'autre, et se recourbent vers l'extérieur pour se rendre avec les médians dans le cotylédon correspondant. Quant aux pôles centripètes, ils sont éteints à ce niveau.

Troisième niveau (fig. 23, C). — Les marginaux sont différenciés. On retrouve les trachées du médian cotylédonaire dans la moitié inférieure du pétiole, entre les deux massifs trachéens des latéraux (fig. 42 et 43). Dans cette partie du pétiole, le bois du faisceau cotylédonaire est donc triple et son liber double. Ce n'est que dans la moitié supérieure du pétiole cotylédonaire que le faisceau prend l'aspect ordinaire, par suite de la fusion complète du médian et des latéraux en un massif désigné par LML (fig. 44).

TROISIÈME PÉRIODE.

Premier niveau (fig. 24, A). — Les pôles centripètes se rejoignent au centre. On retrouve le médian et les latéraux cotylédonaires en contact avec le bois et le liber du faisceau centripète. Les faisceaux caulinaires qui existaient à l'état procambial pendant la période précédente se différencient à leur tour. Leurs pôles sont d'abord plus ou moins confondus avec les éléments ligneux du bois centripète (fig. 45); mais à un niveau un peu plus élevé, une moelle se forme au centre de l'axe (fig. 46). Cette moelle est traversée par des éléments du bois centripète qui servent de joint entre le bois du faisceau bipolaire et les pôles des faisceaux caulinaires : c'est là un troisième contact, *celui des faisceaux caulinaires avec le bois de l'hypocotyle.*

Deuxième niveau (fig. 24, B). — Au nœud cotylédonaire, les faisceaux caulinaires ne sont plus en rapport avec les pôles centripètes, par suite de l'extinction des joints (fig. 47). Ils se trifurquent un peu en dessous de la sortie des faisceaux cotylédonaires.

Troisième niveau (fig. 24, C). — Les branches latérales résultant de cette trifurcation passeront dans la tige et constitueront quatre faisceaux réparateurs désignés par les lettres A, B, C, D. Les branches médianes sont destinées aux feuilles 1 et 2 (1). Le bois et le liber secondaires de ces six faisceaux ne sont que la continuation du bois et du liber secondaires de l'hypocotyle.

D. — *Résumé.*

On doit distinguer dans l'hypocotyle du *Nigella damascena :*

1° Un COLLET SUPERFICIEL au bas de l'hypocotyle, où l'assise pilifère est en contact avec l'épiderme ;

2° Un COLLET INTERNE vers le haut de l'hypocotyle, où s'opèrent *trois contacts ligneux successifs* :

a) Le contact du bois centrifuge du médian cotylédonaire avec le bois primaire centripète de l'hypocotyle *en face* de ce bois (*contact direct*) ;

Ce contact s'établit dès le début de la germination.

b) Le contact du bois des latéraux cotylédonaires avec le bois primaire centripète de l'hypocotyle *de chaque côté* de ce bois (*contact direct*) ;

Ce contact a lieu après que les cotylédons se sont dégagés du spermoderme.

c) Le contact des faisceaux caulinaires avec le bois primaire centripète de l'hypocotyle par l'intermédiaire d'éléments appartenant à la lame ligneuse bipolaire (*contact indirect*).

Ce contact s'opère dès l'apparition des feuilles.

La figure 24, A, résume ces trois contacts ligneux.

Quant au liber, celui des faisceaux cotylédonaires se rattache dans le collet interne au liber du faisceau bipolaire, dès le début de la germination, avant même la différenciation du bois des cotylédons ; celui des faisceaux caulinaires se continue directement avec le liber de l'hypocotyle.

(1) Les deux faisceaux que nous appelons *caulinaires* sont donc formés respectivement par l'anastomose des faisceaux M^1, *A*, *D* et l'anastomose des faisceaux M^2, *B*, *C*.

E. — *Remarques physiologiques.*

De ce qui précède, on conclut que la structure du collet interne du *Nigella damascena* subit avec l'âge des modifications notables. Il existe une connexion intime entre ces modifications et les besoins de la circulation. En effet :

1° Tout au début de la germination, le liber des cotylédons se différencie et se rattache à celui de l'hypocotyle pour assurer le transport des substances plastiques des cotylédons vers la radicule. La circulation minérale étant nulle à cette époque, le bois des cotylédons n'est pas formé ;

2° Au moment où la racine principale se développe, les tissus ligneux des cotylédons se raccordent à leur tour à ceux de l'hypocotyle, première trachée à première trachée, pour permettre le transport dans les cotylédons de l'eau absorbée par la racine (1er contact ligneux) ;

3° Lorsque les cotylédons se dégagent du spermoderme, leur bois se rattache en outre aux côtés de chaque pôle du faisceau de l'hypocotyle, afin de satisfaire aux exigences de la circulation minérale à une époque où les cotylédons commencent à fonctionner comme organes élaborateurs (2^{e} contact ligneux) ;

4° Lorsque les feuilles apparaissent, leurs tissus ligneux se mettent en contact avec ceux de l'hypocotyle (3^{e} contact ligneux). Quant à leurs tissus libériens, ils sont en continuation directe avec ceux de l'hypocotyle et de la racine, car les premières feuilles se placent dans le plan vertical des massifs de liber de l'hypocotyle : cette disposition est de nature à faciliter la circulation de la sève élaborée ;

5° Plus tard, l'hypocotyle se confond plus ou moins avec la racine principale vers le bas, la tige principale vers le haut, et les transports s'effectuent surtout par les tissus secondaires, qui se continuent d'un membre à l'autre.

F. — *Historique. Discussion. Conclusions.*

L'hypocotyle du *Nigella damascena* a été étudié spécialement par M. R. Gérard (1). Cet auteur a seulement considéré la plante à l'époque où les cotylédons sont complètement épanouis ; en ce moment, l'hypocotyle ne présente que des formations primaires. Après avoir décrit les caractères extérieurs de la plantule, il passe en revue les divers phénomènes de ce qu'il appelle le « passage de la racine à la tige ».

« La première modification, dit M. Gérard, porte sur l'épi-
» derme. Sans que la forme et la coloration des cellules changent
» tout d'abord, les poils radicaux deviennent plus rares, puis
» font défaut, une cuticule légère apparaît à leur surface ; les
» cellules s'agrandissent peu à peu et perdent leur coloration
» brunâtre. » J'ai montré (page 10, fig. 20 et 21) que dans la région comprise entre la racine principale et l'hypocotyle, l'épiderme n'est pas la continuation de l'assise pilifère ; celle-ci n'a pas à agrandir ses cellules ni à se cuticulariser ; elle ne devient pas l'épiderme; c'est au contraire celui-ci qui, en se divisant tangentiellement dans la région du collet superficiel, donne naissance à deux couches dont l'interne devient pilifère lorsque l'externe tombe.

Plus loin, M. Gérard écrit : « Le tissu conjonctif central pénètre
» au milieu des éléments des faisceaux vasculaires. Ceux-ci
» prennent l'aspect d'un V dont la pointe tournée vers l'exté-
» rieur est formée par la trachée primitive. A la suite de cet
» écartement, les vaisseaux les plus larges, formés en dernier
» lieu, viennent s'appuyer contre les extrémités des faisceaux
» libériens. La trachée primitive est ensuite repoussée vers
» l'intérieur par interposition de tissu conjonctif entre cette
» trachée et le péricambium. Repoussée de plus en plus pro-
» fondément par la multiplication de ce tissu, la trachée primi-

(1) R. Gérard, *Ann. de sc. nat.*, 6e sér., 1881, p. 308.

» tive entraîne les éléments vasculaires voisins et bientôt les
» deux branches du V se trouvent sur le prolongement l'une
» de l'autre. Comme conséquence, apparaissent deux faisceaux
» libéro-ligneux opposés, confondus par leur extrémité interne,
» formant une sécante au cylindre central. Ils ont les caractères
» des faisceaux de la tige sans en avoir l'orientation. »

. . . . . .

« Lors de la séparation des faisceaux libéro-ligneux qui s'in-
» fléchissent dans les cotylédons, les masses vasculaires opposées
» tournent sur les trachées médianes communes afin de se
» rapprocher et de se confondre. »

Il y a, en effet, à chaque pôle centripète, apparition de deux faisceaux libéro-ligneux destinés à chacun des cotylédons, mais ils ne sont nullement dus à une division du bois centripète. En étudiant attentivement toutes les coupes successives dans le nœud cotylédonaire à l'époque où les cotylédons dégagés du spermoderme ne sont pas encore épanouis, on peut suivre la genèse de ces faisceaux latéraux cotylédonaires contre le bois centripète, de chaque côté de ce bois. A mesure qu'ils se développent et s'incurvent pour sortir dans les cotylédons, le bois centripète s'éteint.

Il existe, du reste, un autre contact dont M. Gérard ne fait pas mention. Aux stades plus jeunes, le bois du faisceau médian cotylédonaire représenté par quelques trachées centrifuges vient s'attacher en face du pôle centripète. Ces trachées se retrouvent plus tard entre les deux faisceaux latéraux : ce sont « les trachées médianes communes » de M. Gérard, autour desquelles il suppose que « les masses vasculaires opposées tournent ».

« A la base du pétiole, la fusion (entre les masses vasculaires)
» est faite, continue M. Gérard, et l'on ne trouve plus qu'une
» seule masse vasculaire centrifuge, à la place de chaque fais-
» ceau centripète de la racine. » J'ai démontré, au contraire, que ces masses représentant les latéraux cotylédonaires restent distinctes jusque vers le milieu du pétiole cotylédonaire, et qu'entre elles se retrouvent les trachées du médian cotylédonaire : ce

n'est que vers la moitié supérieure du pétiole que la fusion entre les trois faisceaux est accomplie.

« Simultanément, dit encore M. Gérard, les faisceaux libériens » se divisaient en trois masses égales. Nous avons déjà suivi » jusque dans les cotylédons, les deux latérales qui se super- » posent aux demi faisceaux vasculaires de la racine; la partie » médiane, plutôt procambiale que libérienne, donne naissance » à sa face interne, dans l'ordre centrifuge, à de petites trachées. » Celles-ci sont les trachées polaires des faisceaux caulinaires. A un stade plus avancé que celui étudié par M. Gérard, à l'époque où les massifs centripètes se rejoignent au centre, on peut voir que les trachées des faisceaux caulinaires se mettent en contact avec les pôles centripètes par l'intermédiaire d'éléments appartenant à la lame bipolaire.

« Les faisceaux libéro-ligneux ainsi constitués, ajoute » M. Gérard, ont dès leur naissance tous les caractères des » faisceaux de la tige. Ils se divisent bientôt en trois masses, » deux petites latérales qui deviennent les nervures latérales » des cotylédons, la médiane plus volumineuse passe dans le » premier entre-nœud. » Il y a là une erreur déjà relevée par M. Nihoul (1). Les quatre masses latérales sont les débuts des faisceaux réparateurs appelés A, B, C, D. En réalité, les « nervures latérales des cotylédons » sont les faisceaux marginaux provenant d'une division des latéraux à leur sortie de l'hypocotyle. On ne peut d'ailleurs se défendre d'un sentiment de surprise en voyant M. Gérard accorder à ses « nervures latérales des cotylédons », une insertion sur l'axe hypocotylé, alors qu'il considère leur nervure médiane comme la continuation du faisceau bipolaire. Comment admettre, en effet, que les faisceaux sortants d'un même appendice se comportent si différemment dans leurs rapports avec l'axe?

En résumé, partant de la racine et se dirigeant vers la tige,

(1) Ed. Nihoul, *Contribution à l'étude anatomique des Renonculacées. Ranunculus arvensis* L. (Mémoires couronnés et Mémoires des savants étrangers, publiés par l'Académie royale de Belgique, t. LII.)

M. Gérard recherche comment les tissus du premier de ces membres « passent » dans le second : il admet la tranformation de l'assise pilifère en épiderme et le passage du système radical dans les feuilles séminales. Dans ce passage, le bois présenterait successivement une orientation centripète, une orientation sécantielle et enfin une orientation centrifuge. Il subirait, en un mot, une torsion de 180°.

J'ai montré qu'il n'y a pas de passage, mais contact dans l'hypocotyle des tissus de la racine avec ceux de la tige. Dans le bas de l'hypocotyle, l'assise pilifère touche à l'épiderme. Dans le haut, le bois centripète du faisceau bipolaire se juxtapose au bois des faisceaux cotylédonaires, des faisceaux foliaires et des faisceaux réparateurs de la tige. Les trachées de la racine ne se continuent donc pas dans les cotylédons; il n'y a pas de torsion de 180°.

La figure 48 résume l'interprétation de M. Gérard et la mienne quant à la structure de la région d'insertion des cotylédons. Les faisceaux destinés aux feuilles 1 et 2, ainsi que les faisceaux réparateurs A, B, C, D, ne sont pas représentés dans cette figure.

§ 2. — COTYLÉDONS.

A. — *Caractères extérieurs.*

J'ai étudié les cotylédons à l'époque de leur complet développement (6e stade).

Forme et dimensions (fig. 49).— Ils présentent un limbe ovale à sommet obtus, long de 20 millimètres et large de 6 à 7 millimètres. Les pétioles mesurent 14 à 15 millimètres de longueur. Ils sont concrescents à leur base sur une longueur d'un $^1/_2$ millimètre environ.

Nervation (fig. 49). — Aussitôt sortis de l'hypocotyle, les latéraux cotylédonaires fournissent chacun une ramification, de façon que le pétiole est parcouru par trois faisceaux : *m*, $\widetilde{\text{LML}}$, *m*. Au sommet du pétiole, le massif $\widetilde{\text{LML}}$ se divise en trois branches L, M, L. Des cinq nervures principales ainsi constituées, les trois du milieu sont plus fortes que les autres, mais toutes se reconnaissent jusqu'au sommet du limbe. Elles émettent de nombreuses nervilles qui s'anastomosent entre elles.

B. — *Histologie.*

Une seule couche de cellules dans le parenchyme palissadique, sous l'épiderme interne, huit dans le parenchyme spongieux, qui occupe les trois quarts de l'épaisseur du mésophylle, sous l'épiderme externe (fig. 50). Chlorophylle dans tout le mésophylle. Un seul faisceau dans chaque nervure. Vues de face, les cellules épidermiques ont un contour irrégulier, plus sinueux à la face externe qu'à l'interne (fig. 51 et 52). Stomates sans cellules annexes, au nombre de cent deux par mm^2 à la face externe, de quarante à la face interne. Ni glande à eau, ni cristaux, ni poils.

§ 3. — PREMIÈRES FEUILLES.

Elles ont été considérées à l'état adulte.

A. — *Caractères extérieurs.*

Feuille 1. *Forme et dimensions.* — La feuille 1 présente des formes très diverses (fig. 53). Dans son état le moins compliqué, elle est simple, ovale, et rappelle le cotylédon, sauf que son pétiole est plus long et son limbe moins obtus à l'extrémité ; cette forme se présente rarement : je ne l'ai observée qu'une fois dans un semis d'une trentaine de plantules. Elle peut aussi être trilobée, à lobes entiers. Mais le plus souvent, ses trois lobes présentent des découpures plus ou moins nombreuses.

Son pétiole mesure de 2 à 4 centimètres de longueur, son limbe 1 $^1/_2$ à 2 centimètres.

Nervation (fig. 54). — Le pétiole est parcouru par trois faisceaux provenant d'une trifurcation du médian à sa sortie. A la base du limbe, le faisceau médian se divise de nouveau en trois branches qui fournissent les nervures médianes aux différents lobes. Nombreuses nervilles anastomosées.

Feuille 2. — La feuille 2 est bipinnatiséquée, à cinq lobes (fig. 55). Comme la feuille 1, elle est longuement pétiolée.

Feuilles suivantes. — Les feuilles 3, 4, 5... sont bipinnatiséquées, à plus de cinq lobes.

B. — *Disposition.*

La figure 56 représente une coupe transversale dans le sommet végétatif au 5e stade. On y voit la concrescence des pétioles cotylédonaires, l'opposition parfaite des cotylédons ainsi que des feuilles 1 et 2. On remarque en outre que dans l'un des cotylédons (l'antérieur, *cot. a.*) le faisceau médian est déjà trifurqué,

tandis qu'il ne l'est pas encore dans l'autre (*cot. p.*) : le premier est inséré un peu plus bas que le second, particularité qui se vérifie, d'ailleurs, dans toutes les séries de coupes à travers le nœud cotylédonaire.

L'individu étudié est dextre, c'est-à-dire que la spire phyllotaxique passant par *cot. a.*, *cot. p.*, *fe*^{1}, *fe*^{2}.... tourne dans le sens des aiguilles d'une montre (1).

Sur une coupe transversale dans le sommet végétatif au 6e stade (fig. 57), on constate que la *fe*^{6} est superposée à la *fe*^{1} et que pour aller de celle-ci à celle-là, il faut faire deux tours de spire.

La figure 58 est la projection horizontale des nœuds de la tige principale un peu plus âgée. Les divergences foliaires sont indiquées dans le tableau suivant :

cot. a	
	> 180°
cot. p	
	> 92°
fe^1	
	> 180°
fe^2	
	> 125°
fe^3	
	> 148°
fe^4	
	> 125°
fe^5	
	> 150°
fe^6	

L'angle moyen de divergence est donc de 143°, soit $^2/_5$ de circonférence : c'est l'angle de la disposition quinconciale.

La plantule qui a fourni cette projection était senestre. Dans la nature, il y a autant d'individus dextres que senestres.

C. — *Histologie.*

Pétiole. — Une coupe transversale au milieu des pétioles foliaires montre trois faisceaux (L, M, L), cinq faisceaux

(1) Dans la figure 56, la spire phyllotaxique passant par *cot. a*, *cot. p*, *fe*^{1}, *fe*^{2}... semble senestre, mais les coupes ayant été pratiquées en tenant l'objet renversé (le sommet de la tige en bas), les images sont symétriques de la disposition réelle.

(*m*, L, M, L, *m*) ou sept faisceaux (*m*, L, *i*, M, *i*, L, *m*), selon le degré de vigueur de la feuille (fig. 59, 60, 61). Chaque faisceau possède un péricycle et un cambium éteint (fig. 62).

Limbe. — Sur une coupe transversale, au milieu du limbe d'une feuille quelconque, on voit (fig. 63) :

1° L'*épiderme*. — Cellules sans chlorophylle, à cuticule mince. Vues de face, elles ont un contour sinueux (fig. 64 et 65). Stomates sans cellules annexes, au nombre de soixante-douze par millimètre carré à la face externe, beaucoup moins nombreux à la face interne, formés par deux cellules de bordure au niveau de la surface et surmontés de deux replis saillants de la cuticule. Pas de poils;

2° Le *mésophylle*. — Une seule couche de cellules dans le parenchyme palissadique sous l'épiderme interne. Parenchyme spongieux sous l'épiderme externe : sept ou huit couches de cellules irrégulières à grands méats. Chlorophylle régulièrement répartie dans tout le mésophylle. Ni cristaux, ni glandes;

3° Les *nervures*. — Faisceau comme dans le pétiole.

§ 4. — TIGE PRINCIPALE.

A. — *Caractères extérieurs.*

La tige principale est entièrement aérienne. Elle reste longtemps courte et commence seulement à s'allonger lorsque la septième ou la huitième feuille pousse. A cette époque, les cotylédons sont flétris.

B. — *Structure.*

La figure 66 montre le parcours des faisceaux dans l'hypocotyle et la tige principale.

Pas d'anastomoses aux nœuds.

La première feuille ne reçoit qu'un faisceau, qui se trifurque dès la base du pétiole. Les autres en reçoivent trois, dont les deux latéraux sont fournis l'un par le groupe qui donne le médian, l'autre par un groupe voisin, de telle sorte que des entrecroisements se produisent aux nœuds : L^2, par exemple, croise L^4 en sortant, comme on le voit dans la figure 67 qui est une projection horizontale des faisceaux des quatre premiers nœuds.

§ 5. — RACINES.

Il y a lieu de distinguer la racine principale et les radicelles. Aucune racine adventive n'a été observée au nœud cotylédonaire ni à la limite entre la racine principale et l'hypocotyle.

Racine principale. — Structure semblable à celle du milieu de l'hypocotyle, sauf que l'épiderme y est remplacé par l'assise pilifère (fig. 68). Elle reste prédominante et devient pivotante.

Radicelles. — Comme la racine principale, sauf que les productions secondaires y sont peu développées.

DEUXIÈME PARTIE

ESPÈCES DIVERSES

I. — GENRE *CLEMATIS.*

Dans un travail précédent (1), j'ai étudié d'une façon détaillée cinq espèces du genre *Clematis :* le *C. vitalba,* le *C. integrifolia,* le *C. viticella,* le *C. flammula* et le *C. recta.*

Embryon. — Il est long de 7 millimètres et large de 3 millimètres. Il est logé dans l'angle supérieur de l'akène. Même structure que celui du *Nigella damascena.*

Hypocotyle. — De longueur moyenne, en partie souterrain.

Pas de racines adventives au nœud cotylédonaire.

Endoderme avec ou sans plissements.

Région d'insertion comme dans le *Nigella damascena.* Dans les plantules à racine tripolaire, un des pôles se termine à la base de l'hypocotyle, de telle sorte que celui-ci ne renferme que les deux pôles nécessaires à l'insertion des cotylédons. Le pôle éteint s'est sûrement développé en dehors de l'influence des faisceaux cotylédonaires. Il ne peut être question pour lui de passage et de torsion de 180°. Quant aux deux autres massifs ligneux centripètes qui sont en contact dans le haut de l'hypocotyle avec les faisceaux cotylédonaires, ils ont dans le faisceau tripolaire de la racine la même allure que le premier. On peut en conclure que le faisceau tripolaire tout entier est indépendant des

(1) Sterckx, *Contribution à l'anatomie des Renonculacées. Tribu des Clématidées.* (Mém. de la Soc. roy. des Sc. de Liége, 2e sér., t. XX.)

faisceaux unipolaires (cotylédonaires, foliaires et réparateurs). Des faits analogues ont été mis en relief par M. Lignier (1) dans le *Gustavia Leopoldi*, et par M. Gravis (2) dans le *Tradescantia virginica.*

Cotylédons. — Épigés, sauf dans le *C. viticella* où ils sont toujours hypogés et dans les espèces *flammula*, *recta* et *corymbosa*, où ils le sont parfois.

Pas de concrescence des pétioles cotylédonaires.

Les cotylédons du *C. vitalba*, du *C. flammula* et du *C. recta* reçoivent chacun trois faisceaux (L, M, L) qui se fusionnent peu après leur sortie, comme dans la Nigelle. Ceux du *C. viticella* et du *C. integrifolia* en reçoivent cinq (*m*, L, M, L, *m*), les marginaux se rattachant de chaque côté de la lame bipolaire de l'hypocotyle.

Des plantules anomales de *C. vitalba* présentent trois cotylédons et des feuilles verticillées par trois. Leur hypocotyle possède trois pôles et la structure du nœud cotylédonaire est analogue à celle des individus normaux.

Premières feuilles. — Dans le *C. vitalba*, on trouve d'abord des feuilles dentées, puis trilobées, trifoliolées, et enfin des feuilles à cinq folioles. Ces premières feuilles n'ont pas leur pétiole volubile comme les feuilles de la tige adulte. Celles de la première paire sont d'inégale grandeur et insérées à des niveaux légèrement différents ; au nœud 1, la feuille qui apparaît la première (*fe*^{1}) est située plus bas et prend un moins grand développement que l'autre (*fe*^{1}). De plus, la *fe*^{1} ne reçoit généralement qu'un faisceau, tandis que la *fe*^{1} en reçoit trois. Ces trois caractères (apparition successive, inégalité de taille à l'état adulte

(1) Lignier, *Recherches sur l'anatomie des organes végétatifs des Lécythidacées.* (Bull. Sc. de la France et de la Belgique, publié par A. Giard, t. XXI, 1890.)

(2) Gravis, *Recherches anatomiques et physiologiques sur le Tradescantia virginica.* (Mémoires couronnés et Mémoires des savants étrangers, publiés par l'Académie royale de Belgique, t. LVII, 1898.)

et différence de niveau d'insertion) se retrouvent aux six ou sept nœuds suivants ; les feuilles de ces nœuds reçoivent chacune trois faisceaux provenant régulièrement des réparateurs A,B,C,D. On peut faire passer une spirale régulière, tantôt dextre, tantôt senestre, par les feuilles les plus jeunes ou par les feuilles les plus âgées de chaque paire. Ces appendices sont cependant placés en croix, mais non rigoureusement opposés l'un à l'autre.

A partir du huitième ou du neuvième nœud, les feuilles de chaque paire sont franchement opposées-décussées, insérées au même niveau et apparaissent simultanément ; elles reçoivent toutes trois faisceaux.

Les premières feuilles du *C. viticella* et de *C. flammula* sont réduites, écailleuses.

Tige principale. — Elle comprend deux régions qui correspondent aux deux manières d'être des feuilles :

1° La région à structure variable, formée des sept ou huit premiers segments (1). Les entre-nœuds contiennent moins de douze faisceaux : ordinairement six gros (parfois cinq seulement) et deux, quatre ou cinq petits. Dans les nœuds, le parcours de ces faisceaux est fort irrégulier et fort variable ;

2° La région à structure constante, à partir du huitième ou du neuvième segment. Les entre-nœuds renferment toujours douze faisceaux (six gros et six petits) qui se ramifient et s'anastomosent d'une façon très régulière dans les nœuds.

La première année, la tige principale reste courte et ne comprend que quelques entre-nœuds.

Racines. — *Racine principale.* — Vigoureuse et pivotante. Faisceau bi- ou tripolaire. Tissus secondaires abondants. Pas de racine adventive à sa limite supérieure.

Radicelles. — Bi- ou tripolaires.

(1) Par *segment caulinaire,* il faut entendre un nœud de la tige avec l'entre-nœud qui précède.

II. — GENRE *ATRAGENE.*

J'ai étudié spécialement l'*Atragene alpina* (1).

Embryon. — Comme dans le *Nigella damascena.*

Hypocotyle. — De longueur moyenne, en partie souterrain.

Pas de racines adventives au nœud cotylédonaire.

Endoderme sans plissements, recloisonné radialement.

Péricycle à deux couches de cellules en face des pôles ligneux. L'interne est destinée à compléter la zone génératrice circulaire en formant deux arcs interlibériens qui fonctionnent, non comme un cambium ainsi que cela a lieu dans le *C. vitalba,* mais comme un cambiforme, c'est-à-dire qu'ils donnent naissance à du tissu fondamental secondaire interne et à du tissu fondamental secondaire externe, tous deux formés de cellules à parois minces.

Cotylédons. — Épigés.

Pas de concrescence.

Trois faisceaux sortent dans le pétiole; ils sont d'abord fusionnés à leur sortie en un seul massif ($\widetilde{LML}$) ; plus haut, les latéraux se bifurquent, comme dans le *Nigella damascena,* puis on trouve cinq faisceaux (*m*, L, M, L, *m*), par suite de la trifurcation du massif $\widetilde{LML}$.

Premières feuilles. — Les feuilles des deux premières paires sont inégalement développées. Au premier nœud, la feuille la plus ancienne (fe^1) est un peu plus petite et simplement crénelée ; l'autre (fe^1) est trilobée. Les feuilles du deuxième nœud sont trilobées. A partir du troisième nœud, les feuilles de chaque paire sont égales et trifoliolées. Les feuilles pérulaires du bourgeon terminal ont un limbe rudimentaire, poilu; la portion inférieure est longue et élargie.

(1) Voir la note de la page 25.

L'étude du parcours et de la vernation, dans des plantules suffisamment jeunes, démontre que les feuilles de chaque paire naissent à des niveaux différents et qu'à chaque nœud les feuilles les plus anciennes (*fe* 1, 2, 3, 4) sont toutes rejetées d'un côté, et les feuilles les plus jeunes (*fe* I, II, III, IV) de l'autre. Il en résulte que les premiers appendices de la tige principale sont disposés dans un ordre distique presque régulier. Ce n'est qu'à partir du cinquième ou du sixième nœud que les feuilles s'attachent au même niveau et sont distinctement opposées-décussées. Comme le *Clematis*, l'*Atragene* dérive d'ancêtres à feuilles alternes.

Tige principale. — Elle reste très courte durant la première année et se termine, à la fin de l'été, par un bourgeon protégé par des feuilles périulaires. Elle renferme quatre faisceaux réparateurs A, B, C, D, d'où se détachent *latéralement* les faisceaux foliaires (médians et latéraux).

Racines. *Racine principale.* — Vigoureuse et pivotante. Bipolaire. Pas de racine adventive à sa limite supérieure.

Radicelles. — Bipolaires ou tripolaires.

III. — GENRE *THALICTRUM.*

M. Mansion (1) a fait une étude détaillée du *Thalictrum flavum.*

Embryon. — 0,4 millimètre de longueur sur 0,2 millimètre de large. Même structure que dans le *Nigella damascena.*

Hypocotyle. — De longueur moyenne, en partie souterrain. Il est fortement ridé transversalement.

Racines adventives au nœud cotylédonaire.

Cellules de l'endoderme recloisonnées radialement et transversalement.

Région d'insertion comme dans le *Nigella damascena.*

Cotylédons. — Pétioles légèrement concrescents à leur base, mesurant 1 centimètre de longueur environ sur 0,5 millimètre à 1 millimètre de largeur. Limbe ovale avec sinus terminal, long de 10 à 12 millimètres et large de 6 à 8 millimètres.

Un seul massif (LML) dans toute l'étendue du pétiole. Nervation très simple : une nervure médiane, deux latérales et deux marginales. Ces cinq nervures principales donnent des ramifications qui se terminent généralement sans s'anastomoser.

Poils glanduleux peu abondants sur le pétiole et les deux faces du limbe. Glande à eau au sommet, munie, à la face interne, d'une douzaine de stomates aquifères béants. Stomates aérifères à la face externe seulement. Pas de cristaux.

Premières feuilles. — Trifoliolées et munies d'une gaine surmontée de deux petites proéminences latérales. Glandes à eau. Stomates à la face externe seulement. Poils glanduleux très peu abondants sur la face externe. Mésophylle bifacial. Elles reçoivent trois faisceaux de la tige.

(1) A. Mansion, *Contribution à l'anatomie des Renonculacées. Le genre Thalictrum.* (Mémoires de la Soc. roy. des Sc. de Liége, 2e sér., t. XX.)

Racines. — Sclérose des fibres primitives au centre du faisceau; production d'îlots dans le tissu fondamental secondaire interne ordinairement sclérifié en face des pôles ligneux primaires; grand développement des parenchymes secondaires externes en dehors des zones cambiales et cambiformes; recloisonnement du péricycle; persistance de l'endoderme recloisonné radialement et occupant la surface après décortication du parenchyme cortical; absence de suber.

Vers la fin de la première saison, toutes les portions âgées des racines se raccourcissent, par suite d'une augmentation de la turgescence de ces organes, et plongent dans le sol les premiers nœuds de la tige principale.

Racine principale. — Bipolaire. Vigoureuse et pivotante.

Racines adventives. — Trois ou quatre pôles.

Radicelles. — Deux, trois ou quatre pôles. Tissus secondaires peu développés ou nuls. Persistance du parenchyme cortical.

IV. — GENRE *ANEMONE*.

J'ai représenté des plantules d'*Anemone Pulsatilla* (fig. 69), d'*A. sylvestris* (fig. 70), d'*A. hortensis* (fig. 71), d'*A. coronaria* (fig. 72 et 73), d'*A. nemorosa* (fig. 74 et 75) et d'*A. apennina* (fig. 76 et 77). Dans la figure 71, on voit la feuille 4 de l'*A. hortensis* en nutation, c'est-à-dire recourbée à la partie supérieure du pétiole pour se frayer un passage dans le sol. Dans l'*A. sylvestris*, des bourgeons adventifs se développent sur la racine principale (fig. 70).

Embryon.— L'embryon est dicotylédoné dans certaines espèces (*Pulsatilla*, *sylvestris*, *rivularis*, *pensylvanica*, *narcissiflora*, *alpina*, *coronaria*, *hortensis*, etc.), acotylédoné dans d'autres (*nemorosa*, *trifolia*, *ranunculoides*, *apennina*). L'absence de cotylédons dans la graine mûre provient d'un arrêt du développement de l'embryon; les cotylédons se forment plus tard, au début de la germination.

Parmi les embryons dicotylédonés, j'ai particulièrement étudié celui de l'*A. narcissiflora*. Il ne diffère pas sensiblement de celui du *Nigella damascena*. Il est long de 0,7 millimètre et large de 0,4 millimètre. La figure 78 en représente la coupe longitudinale, et la figure 79 une coupe transversale pratiquée immédiatement au-dessous du méristème primitif. La concrescence cotylédonaire que l'on remarque dans cette dernière figure n'existe plus dans la coupe suivante.

Parmi les embryons acotylédonés, j'ai spécialement porté mon attention sur ceux de l'*A. nemorosa* et de l'*A. ranunculoides*. Ils sont ovoïdes, extrêmement petits (le premier mesure 0,22 millimètre de longueur sur 0,16 millimètre de largeur, et le second 0,12 millimètre sur 0,7 millimètre) et sont munis d'un assez long suspenseur (fig. 80, 81, 82). Des coupes successives à travers ces embryons montrent une structure homogène, formée de cellules polyédriques sans méats (fig. 83, 84, 85).

Hypocotyle. — Dans les espèces à germination épigée et à pétioles cotylédonaires libres, l'hypocotyle est assez long, en partie souterrain (fig. 69 et 70) : *A. Pulsatilla, sylvestris, stellata, pavonina, virginiana, vitifolia, patens, Hudsoniana, multifida, pensylvanica, decapetala.*

Dans les espèces à germination épigée et à pétioles concrescents (fig. 71, 72, 73, 76, 77), ainsi que dans les espèces à germination hypogée (fig. 74 et 75), l'hypocotyle est court, souterrain, et se renfle souvent en tubercule : *A. alpina, narcissiflora, coronaria, hortensis, apennina; — nemorosa, ranunculoides, trifolia.*

Racines adventives au nœud cotylédonaire dans quelques espèces, notamment l'*A. pensylvanica* et l'*A. sylvestris* (fig. 70).

Endoderme à plissements. Décortication précoce du parenchyme cortical (fig. 86).

La mise en rapport du bois centrifuge et du bois centripète se fait comme dans le *Nigella damascena.* On remarque toutefois que dans l' *A. apennina,* les faisceaux A, B, C, D proviennent du même caulinaire, celui qui est à l'opposé des pétioles cotylédonaires rejetés du même côté et concrescents (fig. 87 à 92 et fig. 93). Chaque pétiole cotylédonaire est parcouru par un faisceau de même structure que dans la Nigelle, c'est-à-dire à bois triple et à liber double.

Cotylédons. — Ils sont épigés, plus ou moins longuement pétiolés (1), bien développés, minces et verts dans les espèces à embryon dicotylédoné; hypogés, sessiles, petits, épais et incolores dans les espèces à embryon homogène, excepté l'*A. apennina,* qui a des cotylédons épigés.

Les pétioles présentent une très légère concrescence à la base dans la plupart des espèces et forment ainsi un tube qui entoure les premières feuilles (1).

(1) D'après M. de Janczewski (*Revue générale de botanique,* n° 43, p. 292), les cotylédons de l'*A. sylvestris* n'auraient ni pétiole distinct, ni gaine. J'ai vu, au contraire, l'un et l'autre dans les plantules de cette espèce, comme l'avait déjà observé Irmisch. (*Botan. Zeitung,* 1886, p. 8.)

Dans l'*A. hortensis* et l'*A. coronaria*, la concrescence s'étend jusqu'à une hauteur plus ou moins grande. Les figures 94 à 97 montrent des coupes successives au-dessus du nœud cotylédonaire dans ces deux plantes. On y voit une cavité d'invagination, un épiderme externe et un épiderme interne (fig. 98). Vers sa base, le développement des premières feuilles produit deux déchirures, l'une à droite, l'autre à gauche (fig. 95). Dans l'*A. coronaria* (fig. 73), les pétioles sont concrescents dans toute leur longueur, de sorte que les deux limbes seuls sont distincts.

Dans l'*A. apennina*, le tube est déchiré d'un seul côté par le développement de la *fe*^{1} ; les deux limbes cotylédonaires concrescents sont d'ailleurs rejetés latéralement, et le tube s'ouvre d'un seul côté pour s'étaler de l'autre en une lame parcourue par deux faisceaux (fig. 99 à 103). Au sommet de la concrescence, cette lame se divise en son milieu par un sillon dont l'épiderme fait suite à celui de la lame, et les deux limbes cotylédonaires se constituent (fig. 104).

Le massif libéro-ligneux $\widetilde{\text{LML}}$ qui parcourt chaque pétiole se trifurque vers le milieu ou le sommet de celui-ci.

La figure 105 représente un cotylédon d'*A. Pulsatilla* et la figure 106 un cotylédon d'*A. nemorosa* en forme de cuiller et à nervation très simple.

Mésophylle bifacial et stomates à la face externe seulement ou aux deux faces dans les cotylédons épigés. Parenchyme homogène et pas de stomates dans les cotylédons hypogés. Ni glandes à eau, ni poils, ni cristaux.

Premières feuilles. — Trois lobes plus ou moins découpés. Elles reçoivent trois faisceaux, sauf dans quelques espèces où la *fe*^{1} et la *fe*^{2} n'en reçoivent que deux (*A. pensylvanica*). La figure 107 montre la nervation de la *fe*^{1} d'*A. apennina*.

Stomates à la face externe seulement ou aux deux faces. Pas de glandes à eau ni de cristaux, mais des poils unicellulaires, allongés, droits, un peu pointus et légèrement recourbés, naissant au milieu d'une rosace de cellules (fig. 108), plus ou moins nombreux sur les bords et à la face interne.

Racines. *Racine principale.* — Bi- ou tripolaire. Elle reste mince et se distingue alors difficilement des radicelles (*A. nemorosa, ranunculoides, trifolia,* etc.) ou s'épaissit (*A. palmata, rivularis,* etc.).

Racines adventives. — Trois ou quatre pôles.

Radicelles. — Deux ou trois pôles.

V. — GENRE *HEPATICA*.

L'*Hepatica triloba* a une germination très lente. La radicule sort de la graine en automne. Au printemps suivant, l'hypocotyle s'allonge et les cotylédons se montrent au-dessus du sol. La gemmule est alors entourée de deux ou trois feuilles périulaires et complètement souterraine. La première feuille végétative (fe^3 ou fe^4) ne se développe que la troisième année (fig. 109). De nouvelles feuilles végétatives et de nouvelles feuilles périulaires se développent les années suivantes, puis la plante fleurit.

Embryon. — Homogène, ovoïde, long de 0,17 millimètre et large de 0,12 millimètre.

Hypocotyle. — Très long, mince, souterrain.

Racines adventives au nœud cotylédonaire et le long de l'hypocotyle : elles aideront la tige principale à entrer en terre pour former un rhizome.

Endoderme avec plissements.

Région d'insertion : comme dans la Nigelle.

Cotylédons. — Limbe ovale. Pétioles très longs portant les limbes au-dessus du sol. Légère concrescence des pétioles à leur base. Un massif libéro-ligneux $\widetilde{\mathrm{LML}}$ dans toute l'étendue du pétiole. Stomates à la face externe seulement. Pas de poils. Nervation caractéristique (fig. 110).

Feuilles végétatives. — Trilobées. Trois faisceaux. Stomates à la face externe seulement. Aux deux faces et sur les bords : poils nombreux, très longs, minces, droits, naissant au centre d'une rosace de cellules (fig. 112). Pour la nervation de la fe^1, voir figure 111.

Racines. *Racine principale.* — Durable, mais reste mince. Bipolaire.

Racines adventives. — Deux, trois ou quatre pôles.

Radicelles. — Bi- ou tripolaires.

VI. — GENRE *ADONIS.*

La figure 115 représente une très jeune plantule d'*Adonis annua* et la figure 114 une plantule plus âgée d'*A. automnalis.* J'ai étudié aussi l'*A. flammea.*

Embryon. — Comme dans la Nigelle.

Hypocotyle. — De longueur moyenne, en partie souterrain. Pas de racines adventives au nœud cotylédonaire.

Endoderme avec plissements (*A. annua*) ou sans plissements (*A. automnalis* et *A. flammea*).

Cotylédons. — Épigés. Pétioles courts, parcourus par trois faisceaux, le massif $\widetilde{LML}$ donnant deux branches marginales à sa sortie. Légère concrescence des pétioles. Limbe longuement lancéolé, à nervures principales parallèles (fig. 115). Pas de stomates à la face interne.

Premières feuilles. — Lobes plus ou moins nombreux et plus ou moins découpés. Pas de stomates à la face interne. Dans l'*A. annua,* les deux premières feuilles reçoivent chacune un seul faisceau; les autres, trois. Dans les deux autres espèces étudiées, la fe^1 reçoit un faisceau; les autres, trois. Mêmes croisements des faisceaux latéraux à la sortie, même disposition des appendices, mêmes divergences foliaires que dans le *Nigella damascena* (comparer la figure 116 à la figure 67).

La figure 117 représente la feuille 2 de l'*Adonis automnalis.*

Tige principale. — Comme dans la Nigelle (comparer les figures 118 et 66).

Racines. *Racine principale.* — Elle reste prédominante et devient pivotante. Bipolaire. Pas de racines adventives à sa limite supérieure.

Radicelles. — Bi- ou tripolaires.

VII. — GENRES *MYOSURUS* ET *CERATOCEPHALUS*.

Ces petites plantes annuelles offrent un facies tout particulier et possèdent des caractères anatomiques communs.

J'ai figuré une plantule de *Myosurus minimus* et une plantule de *Ceratocephalus falcatus* (fig. 119 et 120).

Embryon. — Long de 0,2 millimètre et large de 0,11 millimètre dans le *Myosurus minimus*. La figure 121 montre la coupe transversale de la graine au niveau de l'hypocotyle; la figure 122, la coupe vers le bas de l'hypocotyle, et la figure 123, la coupe dans la moitié supérieure d'un cotylédon. Cet embryon est remarquable par sa petitesse et par le petit nombre de couches cellulaires dans le parenchyme cortical et le faisceau procambial. Dans le cotylédon, le procambium du faisceau n'est pas encore distinct.

Hypocotyle. — Très long, souterrain dans sa partie inférieure, persistant jusqu'à la mort de la plante, dont la végétation est d'ailleurs courte.

Pas de racines adventives au nœud cotylédonaire.

Endoderme à larges cellules, sans plissements.

Région d'insertion : comme dans le *Nigella*.

Cotylédons. — Les cotylédons épanouis sont d'abord fort petits; ils s'allongent ensuite jusque vers l'époque de la floraison et persistent jusqu'à la mort de la plante. Légère concrescence des pétioles à la base. Pétiole court et large. Limbe lancéolé. Parenchyme palissadique peu caractérisé. Cellules du mésophylle petites. Faisceaux étroits. Ni glandes à eau ni poils.

Dans le *Myosurus*, un seul faisceau $\widetilde{\mathrm{LML}}$ dans le pétiole et le limbe constituant une nervure médiane unique (fig. 124). Stomates vers les bords seulement aux deux faces (fig. 125). Dans le *Ceratocephalus*, le faisceau se trifurque, puis chaque branche latérale se divise en deux, de sorte que le limbe est par-

couru par cinq nervures (*m*, L, M, L, *m*); ces nervures sont parallèles, sans ramifications ni anastomoses (fig. 126).

Premières feuilles. — Les feuilles, assez nombreuses, s'allongent jusqu'à l'époque de la floraison. Elles sont comme fasciculées au sommet de l'hypocotyle, parce que les premiers entre-nœuds de la tige sont presque nuls. Les feuilles 1 et 2 reçoivent un faisceau; la *fe* ^{5}, deux, et les autres, trois. Ni poils, ni glandes, ni cristaux.

Dans le *Myosurus*, les feuilles sont toutes lancéolées, linéaires et entières, et leur nervation est fort simple (fig. 127, *fe* ^{1}, et 128, *fe* ^{4}). Stomates aux deux faces, plus nombreux sur les bords.

Dans le *Ceratocephalus*, les trois ou quatre premières feuilles ont la même forme que dans le *Myosurus*, mais les suivantes sont bi- ou trilobées, à lobes entiers (fig. 129, *fe* ^{1}, et 130, *fe* ^{6}). Stomates à la face externe seulement.

Tige principale. — Elle reste d'abord très courte : une coupe dans le nœud cotylédonaire montre à la fois la sortie des faisceaux dans les cotylédons et les huit premières feuilles du *Myosurus* (voir la figure 131, dans laquelle les faisceaux médians foliaires sont seuls représentés). La tige s'allonge ensuite brusquement en un pédoncule uniflore. D'autres pédoncules apparaissent ensuite, comme bourgeons axillaires des feuilles.

Racines. *Racine principale.* — Bipolaire. Elle est grêle et ne porte que peu de radicelles ou pas du tout. Par contre, de nombreuses racines adventives fasciculées se forment au bas de l'hypocotyle, et il devient difficile alors de reconnaître la racine principale.

Radicelles. — Bipolaires.

Racines adventives. — Deux, trois ou quatre pôles

VIII. — GENRE *RANUNCULUS*.

M. Nihoul (1) a étudié spécialement le *Ranunculus arvensis*. De mon côté, j'ai examiné plusieurs autres espèces du genre. Les figures 132 à 141 représentent diverses plantules.

Embryon. — Dicotylédoné, long de 0,4 millimètre à 0,9 millimètre, large de 0,1 millimètre à 0,3 millimètre.

Hypocotyle. — Assez long, en partie souterrain.

Racines adventives au nœud cotylédonaire et aux premiers nœuds de la tige dans beaucoup d'espèces (*Ranunculus cornutus*, fig. 132, *creticus*, fig. 134, *asiaticus*, fig. 135, *cherophyllos*, fig. 137, *muricatus*, fig. 140, *sceleratus*, fig. 141, *arvensis*.

Endoderme sans plissements.

Région d'insertion identique à celle du *Nigella damascena*, même chez les espèces marécageuses (*Ranunculus sceleratus*) ou aquatiques (*Ranunculus divaricatus*).

Cotylédons. — Épigés. Ils sont reportés du même côté dans le *Ranunculus cherophyllos* (fig. 137) et le *Ranunculus asiaticus* (fig. 135).

Pétioles légèrement concrescents à leur base.

Limbe large, ovale ou cordé à la base, à nervation réticulée (*Ranunculus acris*, fig. 142; *Ranunculus muricatus*, fig. 146; *Ranunculus cornutus*, fig. 147; *Ranunculus chius, tuberosus, creticus*) ou petit et à nervation simplifiée, sans ramifications ni anastomoses (*Ranunculus sceleratus*, fig. 143; *Ranunculus cherophyllos*, fig. 144). Dans le *Ranunculus divaricatus*, les cotylédons sont particulièrement étroits et leur mésophylle est homogène et formé d'un petit nombre de grandes cellules, caractères en harmonie avec le genre de vie aquatique.

Ordinairement, un seul massif libéro-ligneux (L̃M̃L̃) dans le

(1) Ed. Nihoul, *loc. cit.*

pétiole cotylédonaire. Parfois, les nervures marginales du limbe descendent jusqu'à la base du pétiole (fig. 147).

Ni poils, ni glandes à eau, ni cristaux.

Stomates aux deux faces.

Premières feuilles. — La *fe*[1] est découpée en dents plus ou moins profondes (fig. 145, 148, 149). Elle est généralement plus petite et offre une forme et une nervation plus simples dans les espèces aquatiques (*Ranunculus sceleratus*, fig. 145). Elle reçoit un (*Ranunculus sceleratus*, *Ranunculus acris*, fig. 149), deux *Ranunculus cherophyllos*, fig. 148) ou trois faisceaux (*Ranunculus cornutus*, *creticus*, *asiaticus*, *muricatus*).

Les feuilles suivantes reçoivent généralement trois faisceaux.

Stomates aux deux faces.

Poils unicellulaires, simples, droits, effilés, raides ou flexibles; ils sont nombreux à la face interne et rares à la face externe dans le *Ranunculus tuberosus* (fig. 150) et le *Ranunculus chius*, très nombreux aux deux faces dans le *Ranunculus acris* et le *Ranunculus bulbosus*, rares et épars le long des nervures à la face externe du *Ranunculus arvensis*.

Racines. *Racine principale.* — Bipolaire. Chez la plupart des espèces, elle reste grêle et courte et se trouve supplantée par un grand nombre de racines adventives apparues au bas de l'hypocotyle. Dans les *Ranunculus tuberosus* (fig. 133), *cornutus* (fig. 132) et *creticus* (fig. 134), elle conserve toutefois assez longtemps une certaine prédominance sur les racines adventives, mais ne se renfle jamais en un pivot.

Racines adventives et radicelles. — Deux, trois ou quatre pôles.

IX. — GENRE *FICARIA*.

Embryon dans la graine mûre. — Au Jardin botanique de Liége, les étamines, dans toutes les fleurs du *Ficaria ranunculoides*, contiennent une certaine quantité de pollen normalement constitué. Un assez grand nombre de fleurs produisent une à cinq graines bien conformées, qui mûrissent dès la première quinzaine de mai. Les pédoncules fructifères étalés sur le sol se recourbent au sommet et enfoncent le fruit en terre.

L'embryon, placé au milieu d'une cavité creusée dans un albumen dur et abondant (fig. 151), est sphérique, très petit (0,15 millimètre de diamètre) et muni d'un suspenseur formé de quelques cellules (fig. 152). Il est constitué par un petit nombre de cellules, sans trace de différenciation (fig. 153, coupe transversale vers le tiers inférieur de l'embryon); en d'autres termes, il est homogène ou acotylédoné.

Marche de la germination. — La germination est très lente.

Des graines ont été semées au mois de mai 1896. Un à deux mois après le semis, l'embryon mesure 0,42 millimètre de longueur sur 0,32 millimètre de largeur, et commence à se différencier. Au-dessus de l'hypocotyle se trouve un organe arrondi, légèrement concave à sa face interne et affectant la forme d'une cuiller; cet organe représente les cotylédons (individu A de face, fig. 154, et de profil, fig. 155) (1).

Quatre mois environ après le semis, l'embryon s'est sensiblement développé. Il est deux fois plus long qu'au stade précédent, mais sa largeur est restée à peu près la même. L'organe cotylédonaire a rapproché ses bords et présente deux saillies à son sommet (individu B de face, fig. 156; de dos, fig. 157). A cette

(1) Les figures 154 à 159 ont été dessinées par M. H. Lonay, assistant de botanique à l'Université de Liége. Je le remercie vivement pour l'obligeance qu'il a mise à me les communiquer.

époque de la germination, le spermoderme est désorganisé et la graine réduite à son albumen blanchâtre. L'embryon subit ensuite un repos hivernal.

Vers le milieu de l'année suivante, l'embryon mesure 2,2 millimètres de longueur sur 0,5 millimètre de largeur à la hauteur de l'hypocotyle. L'organe cotylédonaire présente une partie inférieure rétrécie correspondant aux pétioles et une partie supérieure élargie représentant les limbes (individu C, fig. 158).

En automne, l'embryon s'est encore allongé (individu D, fig. 159), puis il subit un deuxième repos hivernal.

La plantule sort de terre au printemps suivant. Exceptionnellement, deux graines avaient développé leurs cotylédons dans l'air après le premier hiver.

La plantule comprend d'abord (individu E, fig. 160) :

1° Un hypocotyle assez court ;

2° Deux cotylédons concrescents par leur pétiole et la majeure partie de leur limbe ;

3° La racine principale.

Quelques jours plus tard, il apparaît deux radicelles grêles insérées sur la racine principale à la limite inférieure de l'hypocotyle et une racine adventive insérée un peu en dessous du nœud cotylédonaire (fig. 161, individu F); cette racine reste courte et se tubérise de bonne heure; elle est couverte de longues papilles qui tombent plus tard.

Les cotylédons se flétrissent après une couple de mois, c'est-à-dire en mai, lorsque les plantes adultes perdent leurs feuilles et passent à l'état de vie latente : on ne trouve plus alors, en terre, qu'un petit tubercule.

D'ordinaire, la feuille 1 reste petite et souterraine l'année où s'épanouissent les cotylédons. Quatre fois sur un total de trente-cinq germinations, on a observé que la plantule développe la feuille 1 dans l'air la même année que les cotylédons (individu G, fig. 162).

Exceptionnellement aussi, on observe un hypocotyle portant les cotylédons concrescents et deux tubercules dont un vidé. Il se peut que la germination ait suivi, dans ce cas, la marche sui-

vante : développement de l'hypocotyle et formation d'une racine adventive tubérisée, les cotylédons restant toujours emprisonnés dans la graine; l'année suivante, développement des cotylédons aux dépens des réserves accumulées dans le tubercule, qui se vide, et apparition d'un second tubercule.

Hypocotyle. *Structure vers le milieu.* — Dès les premiers mois après le semis (individu A) jusqu'au milieu de l'année suivante (individu C), l'hypocotyle présente un cylindre central à l'état procambial, un parenchyme cortical méatique et un épiderme à cuticule mince (figure 163, milieu de l'hypocotyle de l'individu A).

Vers l'automne de la même année (individu D), le liber commence à se différencier. Le bois, à son tour, se forme au printemps de l'année suivante (individu E) et comprend d'abord un certain nombre de trachées. A cette époque, l'endoderme est sans plissements (fig. 164). Plus tard, lorsque la racine adventive se tubérise (individu F), on trouve des pôles ligneux très larges, quelques éléments secondaires issus d'un cambium peu abondant, un liber peu développé, un endoderme plissé, un parenchyme cortical percé de très grandes lacunes (fig. 165) et un épiderme avec cuticule épaisse.

Structure dans la région d'insertion. — Deux mois après le semis (individu A), l'organe cotylédonaire est parcouru par un cylindre procambial qui s'insère sur celui de l'hypocotyle (fig. 167, coupe au-dessus du nœud cotylédonaire de l'individu A).

A l'époque où se développe la racine adventive (indiv. E, F), une coupe transversale dans le nœud cotylédonaire (fig. 168 et 169) montre :

1° L'insertion d'un bourgeon adventif sur un des pôles centripètes de l'hypocotyle;

2° L'insertion des faisceaux cotylédonaires marginaux de chaque côté de ce pôle (les faisceaux marginaux n'existent pas dans toutes les plantules) ;

3° L'insertion des faisceaux cotylédonaires L, M, L à l'autre

pôle (cette insertion se fait comme celles qui ont lieu aux deux pôles chez le *Nigella damascena*).

Deux coupes plus haut, on trouve (fig. 170) :

1° Le faisceau médian de la feuille 1 inséré sur le pôle centripète à l'opposé des faisceaux cotylédonaires L, M, L (à la place occupée par un cotylédon dans la Nigelle);

2° Les latéraux de la même feuille insérés sur les côtés de la lame centripète.

Cotylédons. *Forme, dimensions, nervation.* — Au printemps de la deuxième année après le semis (indiv. E et F), les deux limbes cotylédonaires concrescents par un de leurs bords affectent la forme d'une lame à sommet très élargi et échancré. Exceptionnellement, le limbe est trilobé (fig. 174), mais alors encore il semble présenter deux sommets organiques seulement.

Les pétioles concrescents mesurent 5 centimètres de longueur. Le limbe est long de 1 centimètre environ et large aussi de 1 centimètre vers son milieu.

La nervation est assez variable, mais avec un peu d'attention on trouve toujours dans chaque moitié du limbe cinq nervures principales : *m*, L, M, L, *m* (fig. 171, 172, 173, 174, 176, 177). Cette disposition des nervures et la bipartition du limbe à son sommet prouvent que le limbe est double et représente en réalité deux cotylédons soudés par un de leurs bords. D'ailleurs, la nervation du limbe dans le *Ficaria* diffère absolument de celle des cotylédons libres, bilobés au sommet. Pour en être convaincu, il suffit de comparer les figures précédentes avec la figure 178, qui représente la nervation d'un cotylédon de Radis.

Dans le cas où les deux nervures marginales voisines des bords du limbe double pénètrent dans le tube pétiolaire de la Ficaire, ce tube est parcouru par trois faisceaux dont le médian est formé par la réunion des nervures L, M, L, *m*, *m*, L, M, L (fig. 172, 174). Dans le cas contraire, le tube pétiolaire ne renferme qu'un massif libéro-ligneux, résultant de l'anastomose de toutes les nervures (fig. 171, 173, 175, 178). On en conclut que la concrescence des cotylédons du *Ficaria* n'a pas seulement lieu

par le rapprochement des bords dans la majeure partie du limbe et dans toute la longueur du pétiole, mais encore par la fusion des faisceaux eux-mêmes dans le pétiole.

Structure du pétiole. 1° *A la base.* — Les premières coupes à la base des pétioles concrescents dans l'embryon déjà un peu développé (C, D) et dans les plantules sorties de terre (E, F) montrent une cavité d'invagination garnie d'un épiderme interne et renfermant le sommet végétatif (fig. 175, 179, 180). Cette cavité n'existe pas pendant les premiers mois qui suivent le semis; le pétiole n'est pas encore distinct à cette époque, et la gemmule n'est pas encore développée.

Quelques coupes plus haut, la cavité d'invagination s'ouvre et l'épiderme interne s'exvagine (fig. 181, ind. C; fig. 182, plantule F; fig. 183, plantule G). Dans les plantules qui développent la feuille 1 la même année que les cotylédons (G), le tube pétiolaire est un peu distendu et déchiré à sa base du côté de cette feuille et au-dessous de son ouverture naturelle (fig. 184).

La différenciation libérienne commence à s'opérer dans le massif médian du tube pétiolaire pendant l'été de l'année qui suit le semis (C, fig. 185). Lorsque les plantules sortent de terre (E), ce massif, complètement différencié, présente une structure qui rappelle celle du *Nigella damascena* (fig. 186).

2° *Au milieu.* — La coupe transversale à ce niveau est circulaire, l'épiderme interne y étant complètement exvaginé (fig. 187). Au stade où la lame cotylédonaire s'épanouit (E), il existe une petite lacune derrière cet épiderme (fig. 187 et 188). Plus tard, à l'époque de la tubérisation de la racine adventive, les lacunes sont beaucoup plus grandes (fig. 189 et 190, F).

Au milieu du tube pétiolaire, le massif médian présente une structure normale (fig. 191, F).

Structure du limbe. — Deux mois après le semis, la coupe du limbe est réniforme; il est parcouru par une nervure à l'état procambial (fig. 198, A).

Dès l'année qui suit le semis, un sillon se forme du côté de l'épiderme interne vers le haut du tube pétiolaire (fig. 192, F), de sorte que la coupe reprend l'aspect qu'elle avait à la base du

pétiole. D'abord, les deux parties séparées par le sillon restent presque accolées l'une à l'autre (fig. 193 et 194, D). Plus tard, la lame s'étale et s'allonge (fig. 195 et 196, F).

Les coupes successives dans le haut du tube pétiolaire de la plantule F représentées par les figures 192, 195 et 196 correspondent à divers niveaux indiqués dans la figure 174.

Vers le sommet du limbe, au niveau des deux lobes, la coupe montre deux lames dans le prolongement l'une de l'autre (fig. 197, F).

Lorsque le limbe cotylédonaire est adulte, on y trouve un parenchyme palissadique à une seule assise, un parenchyme spongieux à trois couches et des stomates aux deux faces (fig. 199, F; fig. 200, épiderme externe).

Premières feuilles. — La *fe*[1] est visible par transparence à travers la base du tube cotylédonaire dans les jeunes plantules (fig. 160 et 161). Elle reste ainsi longtemps cachée sous terre. Son faisceau médian est protégé par un arc de cellules sclérifiées adossées au liber (fig. 201). Dans les plantules qui forment cette feuille l'année même de l'apparition des cotylédons, les faisceaux sont naturellement plus gros et non protégés par du sclérenchyme (fig. 202).

La figure 203 représente la forme et la nervation de la feuille 1.

Racines. *Racine principale.* — Une coupe transversale dans l'extrémité inférieure de l'embryon deux mois après le semis (A) montre la structure ordinaire : à la périphérie les cellules de la coiffe, au centre les initiales de cette coiffe.

Les figures 204 et 205 représentent respectivement l'ensemble et les détails d'une racine à l'époque où les cotylédons sont épanouis. Faisceau bipolaire. Endoderme avec plissements.

Radicelles. — Les deux radicelles signalées plus haut s'insèrent sur les pôles du bois centripète de la racine principale (fig. 206 et 207).

Racines adventives. — La racine adventive tubérisée prend naissance à la base d'un bourgeon adventif inséré au-dessous du

nœud cotylédonaire, du côté de la feuille 1. Son cylindre central s'attache sur le faisceau du bourgeon, comme on le voit dans la figure 208, qui représente cette région vue par transparence après éclaircissement par la potasse.

Faisceau à quatre pôles. Endoderme avec plissements. Parenchyme cortical très développé produisant la tubérisation. Assise pilifère (fig. 209 et 210).

Dans les plantules qui développent la feuille 1 la même année que les cotylédons, il existe une seconde racine adventive qui est allongée, non tubérisée, bipolaire, insérée un peu en dessous du bourgeon adventif (fig. 162; fig. 211, coupe transversale en dessous de l'insertion du bourgeon adventif dans la plantule G : on y voit, outre l'insertion de la racine adventive non tubérisée sur un des pôles de l'hypocotyle, la coupe de la racine tubérisée).

X. — GENRE *CALTHA*.

Une plantule de *Caltha palustris* est représentée fig. 212.

Embryon. — Dicotylédoné.

Hypocotyle. — De longueur moyenne, en partie souterrain.
Racines adventives au nœud cotylédonaire.
Endoderme avec plissements.
Région d'insertion : comme dans le *Nigella*.

Cotylédons. — Épigés. Pas de concrescence. Un seul massif libéro-ligneux dans toute l'étendue du pétiole. La figure 213 montre les caractères extérieurs d'un cotylédon et sa nervation, qui est assez simple (trois nervures L, M, L et quelques faibles ramifications). Stomates aux deux faces. Glande à eau au sommet.

Premières feuilles. — Elles présentent une gaine qui enveloppe les feuilles plus jeunes et dont l'ouverture permet à celles-ci de s'épanouir (fig. 214, coupe dans le bourgeon terminal ; fig. 214*bis*, ouverture de la gaine de la *fe* [1]).

La figure 215 représente la forme et la nervation de la feuille 1. Stomates aux deux faces. Glande à eau au sommet des créneaux.

Racines. *Racine principale.* — Bipolaire. Reste prédominante assez longtemps. Quelques racines adventives à sa limite supérieure.

Radicelles. — Bipolaires.

Racines adventives. — Trois ou quatre pôles.

XI. — GENRE *TROLLIUS.*

J'ai représenté (fig. 216) une jeune plantule de *Trollius europaeus.*

Embryon. — Dicotylédoné, long de 0,5 millimètre et large de 0,2 millimètre. Les figures 217 à 219 représentent respectivement la coupe de la graine à la hauteur des cotylédons, le milieu de l'hypocotyle avec son faisceau procambial et un cotylédon dont le faisceau procambial, au contraire, n'est pas distinct. Cette différence de structure, que j'ai observée aussi dans le *Myosurus* (fig. 122 et 123), est une preuve nouvelle de l'indépendance des faisceaux cotylédonaires par rapport au faisceau de l'hypocotyle.

Hypocotyle. — De longueur moyenne, en partie souterrain.
Pas de racines adventives au nœud cotylédonaire.
Endoderme avec plissements.
Région d'insertion : comme dans le *Nigella.*

Cotylédons. — Épigés. Concrescence des pétioles à leur base sur une longueur de 2 millimètres. Un seul faisceau dans toute l'étendue du pétiole. Pas de stomates à la face interne. Pas de glandes à eau. Nervation semblable à celle du *Caltha* (fig. 220).

Premières feuilles. — Elles possèdent une gaine close (fig. 221) et reçoivent trois faisceaux. Feuille 1 trilobée (fig. 222). Pas de stomates à la face interne. Pas de poils ni de glandes à eau.

Racines. — Comme dans le *Caltha.*

XII. — GENRE *ERANTHIS.*

CARACTÈRES EXTÉRIEURS.

Les plantules d'*Eranthis hiemalis* ne sortent de terre que la deuxième année. Elles comprennent alors une racine principale filamenteuse, un tubercule formé par l'hypocotyle et la base de la racine principale, des cotylédons à pétioles longs de 5 centimètres, concrescents dans toute leur longueur (fig. 223), et un bourgeon au sommet du tubercule. Les feuilles 1 et 2 sont à l'état d'écailles pérulaires.

La troisième année, la *fe*^{3}, à limbe palmatilobé, à pétiole long de 7 centimètres, s'échappe du bourgeon (fig. 224); celui-ci est muni de nouvelles écailles représentant les feuilles 4 et 5. La racine principale filamenteuse est alors en grande partie détruite et plusieurs radicelles se sont développées sur le tubercule. Celui-ci est surmonté d'organes membraneux représentant les débris des cotylédons et les feuilles écailleuses. Pas de racines adventives.

La quatrième année, une nouvelle feuille végétative sort du bourgeon pérulé qui a passé l'hiver, et ainsi de suite jusqu'à ce que la plante fleurisse.

STRUCTURE.

A. — *Embryon.*

L'embryon de l'*Eranthis hiemalis* est homogène, presque sphérique, extrêmement petit (0,12 millimètre sur 0,09 millimètre) et muni d'un suspenseur assez long (fig. 225). Il est logé comme d'ordinaire dans une cavité de l'albumen. Des coupes transversales dans le suspenseur et dans le corps même de l'embryon sont représentées respectivement par les figures 226 et 227.

B. — *Plantules la deuxième année.*

Racine principale filamenteuse. — Bipolaire (fig. 228).

Portion tubérisée. — Une coupe transversale à la base du tubercule montre du centre à la circonférence (fig. 229 à 232) :

1° Deux pôles centripètes ;

2° Deux massifs de bois secondaire ;

3° Une zone cambiforme ovale ayant produit du tissu fondamental secondaire externe et du tissu fondamental secondaire interne ;

4° Deux massifs libériens ;

5° Un endoderme ;

6° Un parenchyme cortical dont les cellules se sont recloisonnées activement pour suivre l'accroissement de l'organe ;

7° Une assise pilifère.

On voit d'après cette structure que la partie inférieure du tubercule correspond à la racine.

Vers le milieu de la portion tubérisée, le bois secondaire s'est écarté du bois primaire (fig. 233).

Dans la partie supérieure du tubercule, les faisceaux cotylédonaires se mettent en contact avec les pôles centripètes très écartés l'un de l'autre à ce niveau (fig. 234 et 235). Comme dans le *Nigella*, on trouve un faisceau cotylédonaire médian en face des pôles centripètes et deux latéraux sur les côtés de ces pôles.

Plus haut encore, le bois centripète est éteint, tandis que les trois faisceaux de chaque cotylédon sont presque fusionnés et se disposent à sortir : c'est le nœud cotylédonaire (fig. 236).

Les parties moyenne et supérieure de la portion tubérisée correspondent donc à l'hypocotyle.

Cotylédons. — Au sommet du tubercule, la coupe traverse le sommet végétatif et montre (fig. 237) :

1° Le tube cotylédonaire avec sa cavité d'invagination ;

2° Deux feuilles rudimentaires sans faisceau (*fe* ^{1} et *fe* ^{2}) ;

3° Le méristème primitif de la tige principale.

Le niveau où le tube est ouvert se trouve quelques coupes plus haut (fig. 238). Puis l'épiderme interne s'exvagine et la coupe prend une forme circulaire (fig. 239 et 240).

Les pétioles concrescents sont creusés en certains endroits d'une grande lacune centrale (fig. 241 et 245) et parcourus par les deux massifs $\widetilde{LML}$. Vers la base de la gaine, l'épiderme, plus ou moins mortifié et pourvu d'une cuticule mince, offre l'apparence d'une assise pilifère (fig. 242). Il présente les caractères ordinaires à un niveau un peu plus élevé (fig. 243 et 244).

La figure 246 représente ces particularités sur une coupe longitudinale schématique. Cette figure indique les niveaux respectifs des figures 237 à 245.

Les deux faisceaux centrifuges de la figure 243 se divisent et s'anastomosent vers le sommet des pétioles, en même temps qu'apparaît un sillon étroit bordé d'un épiderme qui fait suite à celui de la partie convexe : il se constitue ainsi deux limbes cotylédonaires parcourus à leur base par trois nervures (fig. 247, 248, 249). Il arrive dans certains individus que la coupe des pétioles concrescents, au lieu de rester circulaire jusqu'à la base des limbes, prend vers le haut de la gaine l'aspect d'une lame qui s'allonge de plus en plus à mesure que l'on monte (fig. 250, *a*, *b*, *c* et *d*), comme dans l'*Anemone apennina*. Ce fait est la preuve que la coupe circulaire a en réalité deux faces, l'une recouverte par l'épiderme externe, l'autre par l'épiderme interne exvaginé du tube cotylédonaire.

Pas de stomates à la face interne. Ni poils, ni glandes, ni cristaux.

La figure 251 représente les divisions et les anastomoses des faisceaux dans le haut de la gaine, la forme extérieure des limbes cotylédonaires et leur nervation. On remarquera que les faisceaux L et L se détachent des massifs $\widetilde{LML}$ vers le tiers inférieur des limbes. Les niveaux correspondant à ceux de la figure 250 ont été indiqués dans la figure 251.

Il est fort instructif de comparer la nervation des cotylédons de l'*Eranthis* avec celle de l'organe cotylédonaire double du

Ficaria. Que l'on suppose les deux limbes cotylédonaires du premier soudés presque jusqu'au sommet par les bords qui se regardent, et l'on obtiendra le cotylédon double du second et sa nervation.

C. — *Plantules la troisième année.*

Une coupe transversale dans le sommet végétatif de la plantule pendant la troisième année montre les débris des cotylédons, les deux feuilles écailleuses déjà remarquées au stade précédent (*fe* 1 et 2), le pétiole de la fe^3 sortie de terre, les feuilles 4 et 5, rudimentaires, le méristème primitif (fig. 252).

Feuille 3. — Elle reçoit trois faisceaux. Son pétiole est long de 7 centimètres.

Pas de stomates à la face interne.

Forme et nervation représentées par la figure 253.

XIII. — GENRE *HELLEBORUS*.

J'ai représenté (fig. 254) une plantule d'*Helleborus fœtidus*.

Embryon. — Dicotylédoné, long de 0.5 millimètre et large de 0.25 millimètre. J'ai figuré des coupes dans le milieu de l'hypocotyle (fig. 255), le nœud cotylédonaire (fig. 256) et les cotylédons séparés par une couche d'albumen (fig. 257).

Hypocotyle. — Long, partiellement aérien.
Pas de racines adventives au nœud cotylédonaire.
Endoderme sans plissements.
Région d'insertion : comme dans le *Nigella*.

Cotylédons. — Épigés. Pas de concrescence. Le pétiole ne reçoit de l'hypocotyle que le massif $\widetilde{LML}$, mais les nervures marginales descendent jusqu'à sa base. Pour la forme extérieure et la nervation du limbe, voir la figure 258.

Au sommet des cotylédons, il existe une glande à eau sous l'épiderme interne. Cet épiderme porte quelques stomates aquifères sur la région occupée par la glande; ailleurs, il est dépourvu de stomates aérifères (fig. 259). Ceux-ci existent au contraire en grand nombre sur l'épiderme externe (70 par millimètre carré), sauf au sommet (fig. 260 et 261).

Premières feuilles. — Elles sont trilobées, finement dentées et reçoivent trois faisceaux. Pas de stomates à l'épiderme interne, sauf sur la glande à eau (fig. 262), surmontée de six stomates aquifères. Stomates très nombreux à la face externe.

Racines. *Racine principale.* — Vigoureuse et pivotante. Bipolaire. Pas de racines adventives à sa limite supérieure.

Radicelles. — Bi- ou tripolaires.

XIV. — GENRE *GARIDELLA*.

Une plantule de *Garidella nigellastrum* est représentée par la figure 264.

Embryon. — Comme dans le *Nigella*.

Hypocotyle. — Longueur moyenne, en partie souterrain.
Pas de racines adventives au nœud cotylédonaire.
Endoderme avec de légers plissements.
Région d'insertion : comme dans le *Nigella*.

Cotylédons. — Épigés. Pas de concrescence. Stomates aux deux faces. Pas de glande à eau. La figure 263 montre la forme extérieure d'un cotylédon et sa nervation.

Premières feuilles. — La *fe* [1] a trois lobes simples et reçoit deux faisceaux dont l'un se bifurque en sortant. Son pétiole est long de 2 centimètres. Stomates aux deux faces. Pas de glandes à eau. Pour la nervation, voir la figure 265.

Les autres feuilles ont trois lobes plus ou moins divisés et reçoivent trois faisceaux.

Racines. *Racine principale.* — Vigoureuse et pivotante. Bipolaire. Pas de racine adventive à sa limite supérieure.

Radicelles. — Bipolaires.

XV. — GENRE *NIGELLA*.

J'ai étudié des plantules de *Nigella sativa, N. ciliaris, N. hispanica, N. arvensis* et *N. orientalis*. Les figures 266 et 267 représentent respectivement ces deux dernières espèces. Toutes présentent les mêmes caractères essentiels que le *N. damascena*, sauf que l'espèce *hispanica* possède un endoderme à plissements. La figure 268 montre la forme extérieure et la nervation d'un cotylédon de *N. arvensis*.

XVI. — GENRE *AQUILEGIA*.

J'ai étudié spécialement l'*Aquilegia vulgaris* dont la figure 269 représente une plantule.

Embryon. — Comme dans le *Nigella damascena*.

Hypocotyle. — Court, en partie souterrain. Il se renfle en tubercule.

Pas de racines adventives au nœud cotylédonaire.

Endoderme sans plissements.

Le parenchyme cortical se décortique de bonne heure (fig. 270).

Région d'insertion : comme dans le *Nigella*.

Cotylédons. — Épigés. Pas de concrescence. Pas de stomates à la face interne. Pas de glandes à eau. Un faisceau dans toute la longueur du pétiole (1). Pour la forme extérieure et la nervation, voir figure 271.

Premières feuilles. — Elles reçoivent trois faisceaux. Pas de stomates à la face interne. La figure 272 représente la forme et la nervation de la *fe*[1].

Racines. *Racine principale.* — Vigoureuse et pivotante. Bipolaire. Pas de racine adventive à sa limite supérieure.

Radicelles. — Bipolaires.

(1) M. Dangeard (*Le Botaniste*, 1re série, 1889) dit que le pétiole du cotylédon de l'*Aquilegia* renferme deux faisceaux latéraux et que ces faisceaux contractent une anastomose d'un cotylédon à l'autre dans une courte gaine cotylédonaire avant de pénétrer ensemble dans l'hypocotyle. Je n'ai rien observé de semblable.

XVII. — GENRE *ISOPYRUM*.

La figure 273 représente une plantule d'*Isopyrum fumaroides*.

Embryon. — Dicotylédoné, long de 0,5 millimètre, large de 0,14 millimètre.

J'ai représenté la coupe de la graine au niveau des cotylédons (fig. 274) et la coupe de l'hypocotyle (fig. 275).

Hypocotyle. — Long, en partie souterrain.

Pas de racines adventives au nœud cotylédonaire.

Endoderme sans plissements.

Région d'insertion : comme dans le *Nigella damascena*.

Cotylédons. — Épigés, cordés et longuement pétiolés. Pas de concrescence. Un seul faisceau dans le pétiole. Stomates à la face externe seulement. Pour la nervation, voir figure 276.

Premières feuilles. — Trois ou cinq lobes. Stomates à la face externe seulement. Pour la nervation, voir figure 277.

Racines. *Racine principale.* — Bipolaire. Vigoureuse et pivotante. Pas de racines adventives à sa limite supérieure.

Radicelles. — Bipolaires.

XVIII. — GENRE *DELPHINIUM*.

M. Lenfant (1) a étudié quatre espèces de ce genre : deux annuelles, le *D. Ajacis* et le *D. consolida*; une bisannuelle, le *D. Staphysagria*, et une vivace, le *D. elatum*. De mon côté, j'ai fait un examen détaillé du *D. nudicaule* (fig. 278).

Embryon. — Dicotylédoné, long de 0,9 millimètre à 1 millimètre, large de 0,3 millimètre à 0,4 millimètre. Cotylédons séparés l'un de l'autre par une couche d'albumen dans les espèces étudiées par M. Lenfant. Ceux du *D. nudicaule* ne présentent pas ce caractère.

La figure 279 montre une coupe transversale dans l'hypocotyle de l'embryon de cette dernière espèce. Un peu au-dessus du méristème primitif de la tige principale, sur une épaisseur de deux ou trois coupes, on remarque une concrescence entre les pétioles cotylédonaires (fig. 280). Dans la coupe suivante, la cavité d'invagination s'ouvre et les deux limbes se constituent (fig. 281).

Hypocotyle. — Court, en partie souterrain.

Pas de racines adventives au nœud cotylédonaire.

Endoderme sans plissements.

Décortication précoce du parenchyme cortical (fig. 282).

Région d'insertion : comme dans le *Nigella damascena*. Elle est plus courte dans le *D. elatum* que dans les autres espèces. J'ai représenté deux coupes dans le nœud cotylédonaire du *D. nudicaule* (fig. 283 et 284).

Cotylédons. — Épigés. Limbe ovale. Pétioles longs, non concrescents dans certaines espèces (*D. Ajacis*), concrescents à leur base sur une longueur de 1 centimètre environ dans d'autres (*D. elatum*), concrescents dans toute leur longueur

(1) C. Lenfant, *Contribution à l'anatomie des Renonculacées. Le genre Delphinium.* (Mémoires de la Soc. roy. des Sc. de Liége, 2e sér., t. XIX, 1896.)

ainsi que par la base du limbe dans le *D. nudicaule*. Un seul faisceau dans le pétiole cotylédonaire. Nervation : une nervure médiane, deux latérales et deux marginales détachées de la base du limbe, et de très fines nervures anastomosées. Glande à eau. Stomates à la face externe seulement.

La figure 284 montre le tube cotylédonaire du *D. nudicaule*. Il se déchire plus haut de chaque côté pour laisser sortir les feuilles 1 et 2 (fig. 285 et 286). A un niveau plus élevé, le tube est de nouveau fermé; la cavité d'invagination est tellement réduite à ce niveau que les couches d'épiderme qui la bordent de chaque côté sont presque accolées l'une à l'autre (fig. 287 et 288). Vers le sommet des pétioles, la cavité d'invagination s'agrandit (fig. 289 et 290) et, à la base du limbe, les massifs libéro-ligneux se divisent (fig. 291), puis les deux limbes se séparent (fig. 292). Il y a donc une différence au point de vue de la concrescence des cotylédons entre le *Delphinium nudicaule* d'une part, le *Ficaria* et l'*Eranthis* d'autre part. D'un côté, la concrescence se fait par les deux bords, et la sortie des feuilles provoque une déchirure de chaque côté à la base du tube cotylédonaire. De l'autre, il y a concrescence par un bord, et les premières feuilles peuvent sortir sans provoquer de déchirure. On rencontre aussi ces deux modes de concrescence dans le genre *Anemone* (p. 34).

M. Massart (1) a observé que dans le *D. nudicaule* un cotylédon peut être plus petit que l'autre et même manquer complètement, du moins extérieurement.

De son côté, M. Lenfant a rencontré des plantules de *D. Ajacis* dont l'un des cotylédons est bilobé, ainsi que des plantules à trois cotylédons. Dans les premières, le massif médian dans le pétiole du cotylédon bilobé se divise en deux faisceaux qui se rendent dans chaque moitié du limbe. Dans les secondes, le faisceau de l'hypocotyle est bipolaire — et alors l'un des deux massifs cotylédonaires se bifurque — ou tripolaire, et alors l'in-

(1) J. Massart, *La récapitulation et l'innovation en embryologie végétale*. (Bull. Soc. botanique de Belgique, 1894.)

sertion des cotylédons se fait directement sur les pôles de l'hypocotyle, comme dans certains individus de *Clematis viticella*.

Premières feuilles. — Elles reçoivent trois faisceaux, sauf dans le *D. Ajacis* et le *D. consolida*, où la feuille 1 en reçoit un ou deux, et la feuille 2, deux ou trois ; les autres feuilles du *D. Ajacis* reçoivent trois, quatre et même six faisceaux. Glandes à eau au sommet des dents. Stomates à la face externe seulement. Poils unicellulaires, simples, droits, effilés, aux deux faces dans le *D. Ajacis*, le *D. consolida* et le *D. elatum*. Poils unicellulaires, simples, droits, effilés, et poils ventrus à la base dans le *D. Staphysagria*.

Lorsque les premières feuilles du *D. nudicaule* viennent de sortir du tube cotylédonaire, elles sont enfouies sous terre, mais elles se recourbent bientôt dans la partie supérieure du pétiole. Nous avons signalé un fait de nutation semblable dans l'*Anemone hortensis* (p. 32).

Racines. *Racine principale*. — Bipolaire. Vigoureuse et pivotante. Décortication précoce du parenchyme cortical. Pas de racines adventives à sa limite supérieure. Dans le *D. elatum*, elle se contracte longitudinalement et enterre la base de la tige principale.

Radicelles. — Ordinairement bipolaires, quelquefois tripolaires. Productions secondaires peu développées. Parenchyme cortical persistant.

XIX. — GENRE *ACONITUM.*

J'ai étudié spécialement l'*Aconitum uncinatum* (fig. 293), l'*A. napellus*, l'*A. volubile* (fig. 294) et l'*A. stoerkianum* (fig. 295).

Embryon. — Dicotylédoné, long de 0,9 millimètre et large de 0,5 millimètre.

Hypocotyle. — De longueur moyenne, épais, souterrain à sa base. Il se renfle et se tubérise dans plusieurs espèces.

Pas de racines adventives au nœud cotylédonaire.

Endoderme sans plissements.

Région d'insertion : comme dans le *Nigella damascena.*

Cotylédons. — Épigés, très développés, à pétioles très longs dans l'*A. volubile* et surtout dans l'*A. stoerkianum.* Pas de concrescence. Stomates à la face externe seulement. Quelques poils claviformes sur les bords. Pas de glande à eau. Pétiole parcouru par un seul massif libéro-ligneux. La figure 296 montre la forme extérieure et la nervation d'un cotylédon d'*A. uncinatum.*

Premières feuilles. — Elles reçoivent trois faisceaux. Pas de stomates à la face interne. Nombreux poils claviformes et nombreux poils pointus et recourbés sur les bords de la face interne (fig. 297). Pas de glande à eau. La figure 298 représente la forme extérieure et la nervation de la feuille 1 de l'*A. uncinatum.* On remarque à la base du limbe une nervure médiane, deux latérales et deux marginales.

Racines. *Racine principale.* — Vigoureuse et pivotante. Bipolaire ou tripolaire. Elle s'épaissit dans beaucoup d'espèces au contact de l'hypocotyle. Pas de racines adventives à sa limite supérieure.

Radicelles.— Deux ou trois pôles.

XX. — GENRES *ACTÆA* ET *CIMICIFUGA*.

La figure 299 représente une plantule de *Cimicifuga racemosa*. J'ai également étudié l'*Actaea spicata*.

Embryon. — Dicotylédoné. Même structure que dans le *Nigella damascena*.

Hypocotyle. — Court, en partie souterrain.
Pas de racines adventives au nœud cotylédonaire.
Endoderme avec plissements.
Région d'insertion : comme dans le *Nigella*.

Cotylédons. — Épigés. Pas de concrescence. Pétioles plus courts dans le *Cimicifuga* que dans l'*Actaea*. Limbe légèrement mucroné. Pas de stomates à la face interne. Pas de glandes à eau. Poils claviformes et poils cylindriques et recourbés, sur les bords du limbe (fig. 300), les premiers beaucoup plus nombreux que les seconds, tous plus nombreux chez l'*Actaea spicata* que dans le *Cimicifuga racemosa*. Un seul massif dans le pétiole, sauf vers le haut où il y a trois faisceaux (*m*, $\widetilde{\text{LML}}$, *m*). Vers la base du limbe, cinq fortes nervures (*m*, L, M, L, *m*). La figure 301 représente la forme extérieure et la nervation d'un cotylédon de *C. racemosa*.

Premières feuilles. — La feuille 1 est dentée ou trilobée ; elle ne reçoit qu'un faisceau. Les autres feuilles reçoivent trois faisceaux. Pas de stomates à la face interne. Pas de glandes à eau. Poils de deux sortes sur les bords et sur les nervures de la face externe de l'*Actaea spicata*, sur les bords seulement du *Cimicifuga racemosa*.

Racines. *Racine principale.* — Forte et pivotante. Bipolaire. Racines adventives à sa limite supérieure.
Radicelles. — Bipolaires.
Racines adventives. — Deux ou trois pôles.

XXI. — GENRE *PÆONIA*.

La figure 302 montre une plantule de *Paeonia officinalis* au printemps de l'année qui suit le semis.

Embryon. — Dicotylédoné, plus gros que dans les autres Renonculacées (2 mill. sur 0,75 mill. dans le *P. officinalis*). Sa structure est représentée par les figures 303 à 306 (fig. 303 : coupe longitudinale; fig. 304 : hypocotyle; fig. 306 : nœud cotylédonaire; fig. 305 : cotylédon).

La première année, l'embryon s'accroit en se nourrissant des réserves de l'albumen et forme une gemmule. Il n'envoie hors de la graine que la radicule.

Hypocotyle. — Court et souterrain, caractères en rapport avec la situation hypogée des cotylédons.

Pas de racines adventives au nœud cotylédonaire.

Endoderme avec plissements (fig. 307, milieu de l'hypocotyle de la plantule représentée par la fig. 302).

Épiderme à cuticule mince, disjoint à la suite de l'accroissement considérable de l'axe et présentant l'apparence d'une assise pilifère (fig. 308).

Région d'insertion (fig. 309) : comme dans le *Nigella*. Au niveau de cette région, l'épiderme présente les caractères ordinaires (fig. 310).

Cotylédons. — Hypogés. Les pétioles sont assez longuement concrescents à la base; toutefois, les premières feuilles ne déchirent pas le tube cotylédonaire.

Les cotylédons ont uniquement pour fonction d'absorber les réserves d'un albumen particulièrement abondant, au profit de la gemmule et des premières feuilles. Leurs caractères sont en harmonie avec cette fonction. On n'y trouve, en effet, ni chlorophylle, ni stomates, ni cuticule, ni glandes à eau; leurs cellules sont gorgées d'amidon; leur limbe est peu développé et leur nerva-

tion simplifiée (fig. 311); enfin, leur mésophylle est homogène et composé de cellules plus ou moins régulièrement disposées en rangées et plus grandes à mesure que l'on s'approche du centre de la coupe (1) (fig. 312).

Premières feuilles. — Elles prennent naissance sous terre, par suite du mode de germination.

Elles sont trilobées et reçoivent trois faisceaux.

Racines. *Racine principale.* — Bipolaire. Pivotante. Pas de racines adventives à sa limite supérieure.

Radicelles. — Bipolaires.

(1) Dans certains embryons monocotylédonés, entre autres le Palmier, figuré par Sachs, et le *Tradescantia*, étudié par M. Gravis (*loc. cit.*), l'adaptation du cotylédon à la fonction de suçoir est beaucoup mieux marquée : le limbe est rudimentaire et pourvu de papilles absorbantes.

TROISIÈME PARTIE

RÉSUMÉ, HISTORIQUE ET CONCLUSIONS

I. — EMBRYON.

L'embryon des Renonculacées est droit et logé dans un albumen abondant et dur. Il est dicotylédoné, sauf dans l'*Anemone nemorosa*, l'*A. trifolia*, l'*A. ranunculoides*, l'*A. apennina*, l'*Hepatica triloba*, le *Ficaria ranunculoides* et l'*Eranthis hiemalis*, qui possèdent un embryon acotylédoné, homogène.

A. Embryon dicotylédoné. — L'embryon dicotylédoné est long de 0,2 millimètre à 2 millimètres et large de 0,1 à 0,75 millimètre. On y distingue quatre parties :

1° La *radicule*, depuis le suspenseur jusqu'au niveau où l'épiderme se dédouble tangentiellement (collet superficiel). Son cylindre central est à l'état procambial et renferme inférieurement le tissu générateur du faisceau de la racine principale.

2° L'*hypocotyle*, depuis le collet superficiel jusqu'au nœud cotylédonaire.

3° Le *méristème primitif de la tige principale*, au-dessus de l'hypocotyle. Il est nu, c'est-à-dire qu'on n'y trouve pas de trace de gemmule.

4° *Deux cotylédons*, le plus souvent appliqués l'un contre l'autre, séparés par une mince couche d'albumen dans quelques genres (*Delphinium*, *Helleborus*) ; ce dernier caractère ne s'observe pas toutefois dans le *Delphinium nudicaule*. Leur surface est parallèle aux faces latérales de la graine.

B. Embryon acotylédoné. — L'embryon acotylédoné est extrêmement petit (0,12 à 0,22 millimètre sur 0,07 et 0,16 millimètre), ovoïde ou sphérique. Il ne présente ni différenciation externe ni différenciation interne. Il se compose d'un certain nombre de cellules semblables à parois minces, sans méats.

Déjà en 1837, A. de Saint-Hilaire (1) admettait l'homogénéité de certains embryons. En 1866, M. Van Tieghem (2) reconnut que l'embryon de la graine mûre de *Ficaria* est constitué par « une petite masse sphérique... divisée en un grand nombre de cellules ». De son côté, M. de Janczewski (3) a observé un embryon acotylédoné dans plusieurs espèces du genre *Anemone*.

(1) A. de Saint-Hilaire, *Mémoire sur les Myrsinées, les Sapotées et les embryons parallèles au plan de l'ombilic*, présenté à l'Académie des sciences le 18 avril 1837.

(2) Van Tieghem, *Observations sur la Ficaire*. (Ann. des Sc. nat., Botanique, t. V, 1866.)

(3) De Janczewski, *Études morphologiques sur le genre Anémone*. (Rev. gén. de botanique, nos 42 et 43, 1892.)

II. — HYPOCOTYLE. COLLET SUPERFICIEL. COLLET INTERNE.

Le mot *collet* a été introduit dans la science pour désigner la limite entre la racine et la tige. Mais des opinions très diverses ont été émises quant à la situation et aux caractères de cette limite.

En 1786, Lamarck (1) appela *collet de la racine* « l'extrémité supérieure de la racine des plantes », c'est-à-dire « la partie de la racine qui est réunie avec la tige lorsque le végétal en est pourvu ». Dans les plantes sans tige, « les feuilles et les pédoncules des fleurs naissent immédiatement au collet de la racine ».

A. Pyr. de Candolle (2), Meyen (3) et A. de Saint-Hilaire (4) ne savent pas exactement où placer le collet. Pour les deux premiers, c'est une partie mystérieuse de l'organisation qui est plutôt la juxtaposition de deux organes qu'un organe proprement dit. Pour le troisième, « le collet se reconnaît surtout dans la jeunesse de la plante, à une différence de grosseur entre la tige et la racine, mais plus souvent il est impossible de déterminer avec une parfaite précision où il se trouve placé. » Tous les trois admettent cependant que le collet est situé plus bas que les cotylédons.

D'autres botanistes appelèrent collet le point d'attache des cotylédons (Gaertner, L.-C. Richard, Correa, Mirbel (5), etc.).

En 1849, Clos (6) reconnut que le collet occupe « toute la portion de l'axe comprise entre les cotylédons et la base de la racine désignée elle-même par le lieu où commencent à se mon-

(1) Lamark, *Encyclopédie méthodique. Botanique,* 1786.

(2) A. Pyr. de Candolle, *Mémoire sur les Légumineuses,* t. II.

(3) Meyen, *Pflanzen Physiologie,* III.

(4) A. de Saint-Hilaire, *Leçons de botanique,* 1840.

(5) D'après de Candolle, *loc. cit.*

(6) Clos, *Du collet dans les plantes.* (Ann. sc. nat., Botanique, 3e série, t. XIII, 1849.)

trer les rangs réguliers et symétriques des radicelles. Cette nouvelle définition du collet s'appuie sur ce qu'on peut lui assigner des caractères parfaitement tranchés, tirés de sa conformation extérieure et souvent aussi de son organisation interne..... C'est dans le collet que commence la moelle. C'est aussi dans le collet que les faisceaux fibro-vasculaires descendent de la tige... »

Le double mérite de Clos est d'avoir reconnu le premier que le collet n'est pas un plan, mais une région, et d'avoir introduit l'idée de le distinguer par ses caractères anatomiques.

En 1871, Dodel (1) étudie le « passage » dans le genre *Phaseolus* et signale la division des faisceaux vasculaires radicaux en passant dans la tigelle.

Partageant l'avis de Clos, M. Prillieux (2) admet une zone de transition plus ou moins étendue dans laquelle on retrouve les caractères anatomiques soit de la racine, soit de la tige.

Pour M. Van Tieghem (3), le collet est « la ligne circulaire qui sépare les deux surfaces (la surface de la tige et la surface de la racine). Dès que la racine entre en développement, la moitié externe de la première cellule épidermique dédoublée se détache comme première assise de la coiffe, et il en résulte un gradin à descendre pour passer de la surface primitive de la tige à la surface dénudée de la racine. Peu après, la moitié interne mise à nu se prolonge par un poil absorbant. »

MM. Flahault (4), Olivier (5) et Dangeard (6) décrivent cette région de la même manière. « Il importe de remarquer, dit M. Olivier, que l'épiderme radiculaire, bien qu'issu de l'épiderme

(1) Dodel, *Der Uebergang des Dicotyledonen-Stengels in die Pfahl-Wurzel.* (Pringsheim's Jahrb. f. wissensch. Botanik, Bd. VIII, Heft 2, 1871.)

(2) Prillieux, *Bulletin de la Société botanique de France,* 6 juillet 1877.

(3) Van Tieghem, *Traité de Botanique,* 1re éd., p. 765; 2e éd., p. 781. L'auteur y résume ses travaux antérieurs (1869, 1871, 1872).

(4) Flahault, *Recherches sur l'accroissement terminal de la racine chez les Phanérogames.* (Ann. sc. nat., 6e sér., t. VI, 1878.)

(5) Olivier, *Ann. sc. nat.,* 6e sér. *Botanique,* 1881, p. 17.

(6) Dangeard, *Recherches sur le mode d'union de la tige et de la racine chez les Dicotylédones.* (Le Botaniste, 1re sér., 1889.)

de la tigelle, n'en procède que par voie de division; il ne représente donc pas la *totalité* de l'assise épidermique de la tige. » — « A un certain niveau, dit M. Dangeard, à l'unique assise épidermique correspondent deux assises, dont l'une, l'extérieure, servira, en se cloisonnant tangentiellement, à former la *coiffe* et dont l'autre constituera l'assise pilifère. »

En même temps qu'il explique le changement de surface à la limite entre la racine et la tige, M. Van Tieghem recherche « la transformation des faisceaux simples libériens et ligneux de la racine dans les faisceaux doubles libéro-ligneux de la tige » et reconnaît que cette transformation peut avoir lieu de trois manières :

« 1° Les faisceaux libériens de la racine s'élèvent simplement en ligne droite dans la tige. Les faisceaux ligneux, arrivés près du collet, multiplient leurs vaisseaux et se dédoublent suivant le rayon. Les deux moitiés se séparent et, s'inclinant à droite et à gauche, vont s'unir deux par deux en dedans des faisceaux libériens alternes... En se déplaçant, chaque moitié du faisceau ligneux tourne sur elle-même, se tord de 180°, de façon à diriger en dedans la pointe qu'elle présentait en dehors;

» 2° Le plus souvent, les faisceaux libériens se dédoublent latéralement comme les faisceaux ligneux, et leurs deux moitiés vont, pour ainsi dire, au-devant des deux moitiés ligneuses;

» 3° Quelquefois enfin, les faisceaux ligneux restent en place en se tordant de 180°, et ce sont les faisceaux libériens dédoublés qui font tout le chemin. »

M^elle^ S. Goldsmith (1) admet aussi que le passage de la tige au pivot s'effectue par une torsion anatomique.

Dans l'exposé des résultats généraux que M. Gérard (2) a cru pouvoir tirer de l'étude du *Nigella damascena* et d'autres plantules, cet auteur interprète la structure du collet interne de la même

(1) S. Goldsmith, *Beiträge zur Entwickelungsgeschichte Fibrovasalmassen im Stengel und in der Hauptwurzel der Dicotyledonen.* Zurich, 1876, thèse inaugurale.

(2) Gérard, *loc. cit.*

façon. Il admet que « le système radical passe entièrement dans les feuilles séminales », et il distingue six temps dans ce passage :

« 1° Augmentation du nombre des éléments du faisceau et égalisation de leur diamètre. Ce premier fait est surtout sensible chez les Monocotylédones, où le diamètre des vaisseaux internes dépasse considérablement dans la racine celui des trachées. Ces végétaux perdent ainsi leur facies radical spécial et leur assimilation aux Dicotylédones devient complète;

» 2° Groupement sur plusieurs files des éléments primitivement uniséries plus bas; leur assemblage en une masse plus compacte lorsque les éléments vasculaires de la racine sont rangés sur plusieurs files;

» 3° Segmentation longitudinale qui donne naissance à deux faisceaux parallèles centripètes;

» 4° Superposition de ces faisceaux aux masses libériennes voisines et formation des faisceaux libéro-ligneux;

» 5° Passage du bois de l'orientation centripète à l'orientation sécantielle;

» 6° Passage de l'orientation sécantielle à l'orientation centrifuge. »

Avec MM. Van Tieghem, Flahault, Olivier et Dangeard, je reconnais que l'assise pilifère chez les Dicotylédones est la couche interne de l'épiderme de l'hypocotyle dédoublé tangentiellement. Il convient d'appeler *collet superficiel*, le niveau auquel a lieu ce dédoublement. Mais je ne puis admettre les explications de MM. Dodel, Van Tieghem, M^lle^ Goldsmith et M. Gérard quant au *collet interne*, c'est-à-dire la région où se fait le contact du faisceau multipolaire avec les faisceaux unipolaires.

Il n'y a pas *passage* de la racine à la tige, mais *mise en rapport* dans l'hypocotyle du faisceau de la racine d'une part avec les faisceaux cotylédonaires et caulinaires d'autre part.

Il n'y a pas continuation dans les cotylédons des trachées de la racine, mais il existe deux sortes d'éléments ligneux : les uns à développement centripète dans la racine et l'hypocotyle; les autres à développement centrifuge dans le nœud cotylédonaire, les cotylédons, la tige et les feuilles.

Il n'y a pas non plus torsion de 180°, mais seulement incurvation des faisceaux lors de leur sortie dans les cotylédons.

Au surplus, si l'interprétation de ces botanistes était vraie, il faudrait admettre que les cotylédons, contrairement aux autres organes appendiculaires, n'ont pas d'insertion sur l'axe, qu'ils n'ont pas de faisceaux propres, que leurs faisceaux ne sont que la continuation de celui de la racine et de l'hypocotyle ; en d'autres termes, il n'y aurait pas de *trace cotylédonaire*. Or, on conçoit difficilement que les cotylédons, qui ne sont que des feuilles embryonnaires, se comportent autrement que les feuilles ordinaires.

Remarquons d'ailleurs que les explications de ces auteurs sont en contradiction avec les faits observés par Nägeli (1) et plus récemment par MM. Bertrand (2), Vuillemin, Gravis, Lignier et Dangeard.

Pour M. Vuillemin (3), « il n'y a pas transformation du système de la racine en système de tige. Tous deux sont absolument indépendants; ... il n'y a aucun passage de la racine à la tige, mais insertion du pivot sur la tige principale » ... « La tigelle a une structure hybride de tige et de racine sans qu'elle soit par elle-même l'une ou l'autre : tige par ses connexions, par ses appendices, par son épiderme, racine par ses systèmes profonds »... « Les faisceaux radicaux, tout en modifiant leur structure, ne transforment jamais, tant qu'ils existent, leur orientation caulinaire. »

M. le professeur Gravis (4) voit dans l'axe hypocotylé de l'ortie, le contact du faisceau bipolaire de la racine avec deux

(1) Naegeli, *Ueber das Wachsthum des Stammes und der Wurzel bei den Gefässpflanzen.* (Beitraege z. wissensch. Botanik, Heft I, 1858.)

(2) Bertrand, *Traité de Botanique.* (Archives botaniques du Nord de la France, t. I, 1881.)

(3) Vuillemin, *De la valeur des caractères anatomiques au point de vue de la classification des végétaux. Tige des Composées.* Paris, 1884.

(4) Gravis, *Recherches anatomiques sur les organes végétatifs de l'Urtica dioica.* (Mémoires couronnés et Mémoires des savants étrangers, publiés par l'Académie royale de Belgique, t. XLVII, 1884.)

faisceaux larges centrifuges, qui, en se ramifiant, fournissent les faisceaux cotylédonaires et les faisceaux de la tige principale. Dans l'hypocotyle de *Tradescantia virginica*, le même auteur [1] distingue un double contact ligneux :

« 1° Le contact des trachées des deux faisceaux cotylédonaires avec celles de deux des pôles centripètes de la racine; ce contact s'établit de bonne heure et dans le haut de l'hypocotyle, c'est-à-dire dans le nœud cotylédonaire même ;

» 2° Le contact des trachées des trois faisceaux de la feuille 1 (faisceaux L, M, L) avec celles des trois pôles centripètes de la racine; ce contact s'établit plus tard et dans le bas de l'hypocotyle [2]. »

M. Lignier [3] a montré que l'arrangement des tissus ligneux en lames tournantes dans le nœud cotylédonaire est dû, non à la torsion des faisceaux cotylédonaires, mais à la formation de tissus de mise en contact entre l'axe hypocotylé et la racine principale.

D'après M. Dangeard [4], il faut considérer séparément trois parties dans l'hypocotyle : « la racine, les faisceaux fournis par les cotylédons, les faisceaux fournis par les feuilles. Les faisceaux

(1) Gravis, *Recherches anatomiques et physiologiques sur le Tradescantia virginica.* (Mémoires couronnés et Mémoires des savants étrangers publiés par l'Académie royale de Belgique, t. LVII, 1898.)

(2) Chez les Monocotylées, le cotylédon, étant souvent hypogé, ne joue ordinairement aucun rôle dans l'élaboration; sa fonction alors est uniquement de sucer la nourriture dans l'albumen au profit de la plantule. La première feuille, au contraire, est chargée de transpirer et d'élaborer. Aussi, dans le *Tradescantia*, cette feuille se relie-t-elle fortement au faisceau radical par des faisceaux qui descendent jusqu'au bas de l'hypocotyle, tandis que le contact du cotylédon avec ce faisceau radical se fait par quelques trachées seulement et dans le haut de l'hypocotyle.

Chez les Dicotylées, au contraire, les cotylédons sont souvent épigés et par conséquent élaborateurs. De même que les premières feuilles, ils ont des attaches puissantes avec le faisceau de la racine vers le haut, le milieu ou le bas de l'hypocotyle et parfois dans la racine même.

(3) Lignier, *Recherches sur l'anatomie comparée des Calycanthées, des Mélastomacées et des Myrtacées* (thèse). Paris, 1887.

(4) Dangeard, *loc. cit.*

de la racine ne s'allongent que vers le bas; aussi ne dépassent-ils jamais les cotylédons. » Dans le *Nigella*, le *Delphinium*, l'*Helleborus*, le *Thalictrum*, l'*Adonis*, « la racine, dit encore cet auteur, possède deux faisceaux et les faisceaux sont également au nombre de deux dans chaque pétiole des cotylédons. Ils descendent verticalement et viennent s'*unir* plus ou moins bas à la partie interne du faisceau correspondant de la racine; il en résulte une disposition en forme de T ou de V ».

Dans une note postérieure à la publication de son *Traité de Botanique*, 2e édition, M. Van Tieghem (1) distingue deux parties dans l'hypocotyle de l'embryon : en haut, la *tigelle*, « base de la tige » ; en bas, la *rhizelle*, « base de la racine ». « La rhizelle et la radicule composent la racine, comme la tigelle et la gemmule constituent la tige. » Recherchant ensuite la limite de la tige et de la racine dans les plantules des Dicotylées et des Gymnospermes, ce botaniste propose de placer cette limite au niveau que nous avons appelé collet superficiel, si l'hypocotyle est court ou s'allonge par la croissance intercalaire de la tigelle seulement. Mais quand l'hypocotyle s'allonge par la tigelle et la rhizelle à la fois, ou par la rhizelle seulement, on commettrait une trop grande erreur, dit-il, en prenant le collet superficiel pour limite, car la rhizelle, rapportée à la tige, formerait alors à elle seule la presque totalité de l'hypocotyle. Dans ce cas, il place la limite de la tige et de la racine dans notre collet interne. Cette limite varierait donc avec le mode de germination, et l'hypocotyle devrait être attribué tantôt en totalité à la tige, tantôt en grande partie à la racine.

Il me paraît difficile d'admettre une théorie conduisant à de tels résultats. Je pense que c'est un tort de vouloir, dans les plantules, tout ramener à la tige ou à la racine. Si, au contraire, on considère l'hypocotyle comme un *membre*, il est rendu, par cela même, distinct de la racine et de la tige; les termes *tigelle* et *rhizelle*, impossibles à définir puisqu'ils désignent des portions

(1) Van Tieghem, *Sur la limite de la tige et de la racine dans l'hypocotyle des Phanérogames.* (Journal de botanique, 16 décembre 1891.)

de l'hypocotyle sans limites précises, deviennent inutiles ; des régions pourvues d'un épiderme et de stomates ne doivent plus être attribuées à la racine. L'hypocotyle est une région embryonnaire limitée vers le haut par l'insertion des cotylédons et vers le bas par le collet superficiel. Cette région forme comme le trait d'union entre la racine et la tige. Quant au collet interne, il ne peut servir à limiter la racine de la tige : il occupe tantôt une portion de l'hypocotyle (vers le haut, le milieu ou le bas), tantôt la base organique de la racine principale ou, au contraire, les premiers entre-nœuds de la tige principale.

En résumé, il convient de distinguer dans les plantules des Dicotylées le *collet superficiel*, le *collet interne* et l'*hypocotyle*.

A. — Le *collet superficiel* est le niveau où l'assise pilifère est en contact avec l'épiderme. Il indique la limite entre la racine principale et l'hypocotyle.

B. — Le *collet interne* est une région plus ou moins étendue où les faisceaux à bois centrifuge des cotylédons, de la tige et des premières feuilles se mettent en rapport avec le faisceau à bois centripète de la racine.

Dans les Renonculacées, le collet interne occupe le haut de l'hypocotyle. Le rapport entre le bois centrifuge et le bois primaire centripète s'y établit par trois contacts successifs : un contact direct et par opposition, un contact direct et latéral, un contact indirect (voyez p. 14). La région de mise en rapport commence de $^1/_2$ à 3 millimètres au-dessous du nœud cotylédonaire et finit à ce nœud. Cette mise en rapport se fait de la même manière dans toutes les espèces de la famille, quels que soient le milieu où elles vivent, leur facies, la situation épigée ou hypogée des cotylédons et leur nervation. La structure de la région de contact est donc plus constante que celle des cotylédons qui, comme nous l'avons constaté, subissent une certaine adaptation.

C. — L'*hypocotyle* est un membre embryonnaire, intermédiaire entre la racine principale et la tige principale, et servant à l'insertion des cotylédons et de la tige principale sur la racine.

Il a pour limite inférieure le collet superficiel et pour limite supérieure le nœud cotylédonaire. La tige n'en est pas la continuation directe. Il n'a ni la structure typique de la racine ni celle de la tige. C'est, suivant l'expression de M. Vuillemin, « un terrain neutre à travers lequel s'opère le raccord entre les systèmes radicaux et les systèmes caulinaires ». Son parenchyme cortical et son faisceau multipolaire se continuent respectivement avec le parenchyme cortical et le faisceau de la racine. Toujours recouvert par un épiderme, il renferme, selon les niveaux, du bois centrifuge, du bois centripète ou les deux à la fois. Membre temporaire servant d'axe à l'embryon et à la plantule, et destiné à l'insertion des faisceaux à bois centrifuge, il est appelé à disparaître ou du moins à se confondre avec la racine principale vers le bas et la tige principale vers le haut, à l'époque où son parenchyme cortical est décortiqué.

ANNEXE.

EXISTENCE D'UNE COUCHE MORTIFIÉE SUR L'HYPOCOTYLE ET LES PÉTIOLES COTYLÉDONAIRES.

L'assise mortifiée qui recouvre le tube cotylédonaire de l'*Eranthis hiemalis* au-dessus du niveau de la gemmule, représenterait, d'après M. Dangeard (1), « l'assise pilifère elle-même ou une assise sous-jacente ». J'ai montré que cette couche est un épiderme véritable recouvrant la base du tube cotylédonaire et le tubercule au-dessus du collet superficiel : il est seulement garni de papilles analogues à celles d'une racine. Le raccord de l'assise pilifère vraie et de l'épiderme a lieu comme d'ordinaire à la base de l'hypocotyle, et pour expliquer l'existence de cette couche mortifiée, il est inutile d'admettre, avec M. Dangeard, « un accroissement intercalaire très différent de l'écorce et du cylindre central de la tige et de la racine ».

(1) Dangeard, *loc. cit.*

Le *Paeonia officinalis* offre d'ailleurs une particularité semblable. Au niveau où commence le collet interne, l'hypocotyle entièrement souterrain de cette plante est recouvert d'une assise présentant l'aspect de l'assise pilifère proprement dite. L'épiderme bien caractérisé n'existe qu'à un niveau un peu plus élevé. Quant à la véritable assise pilifère, elle ne se rencontre que sur la racine.

D'après M. Géneau de Lamarlière (1), l'assise externe flétrie du tube cotylédonaire du *Smyrnium rotundifolia* et du *Chaerophyllum bulbosum*, est aussi une assise pilifère. « Ainsi donc, écrit-il, un pétiole peut être muni de l'assise pilifère considérée ordinairement comme le caractère exclusif de la racine, et le collet... est ici placé à mi-hauteur d'un pétiole. » Cet auteur oublie que le caractère distinctif de l'assise pilifère est son mode de formation par cloisonnement tangentiel et exfoliation d'un tissu superficiel formant coiffe. Ainsi entendue, elle est toujours le « caractère exclusif de la racine » et n'existe qu'au-dessous du collet superficiel.

En résumé, la couche pilifère qui recouvre l'hypocotyle du *Paeonia*, l'hypocotyle et la base du tube cotylédonaire de *l'Eranthis*, etc..., doit être considérée comme un épiderme plus ou moins mortifié, à cuticule mince, pouvant fonctionner comme une assise pilifère proprement dite. L'existence de cette couche n'altère en rien la définition que j'ai donnée plus haut du collet superficiel.

(1) Geneau de Lamarlière, *Recherches sur le développement de quelques Ombellifères.* (Revue gén. de botanique, t. V, nos 52, 53 et 54.)

III. — GERMINATION.

La germination a été étudiée par un grand nombre d'auteurs.

M. Klebs (1) reconnaît six modes de germination parmi les Dicotylées.

M. Massart (2) distingue six types de germination.

M. Lubbock (3) a décrit les caractères extérieurs d'un grand nombre de plantules.

De leur côté, MM. Irmisch (4), de Janczewski (5) et Hildebrand (6) ont observé la germination des Anémones.

Parmi les botanistes qui se sont occupés de la germination de Renonculacées, citons encore Wichura (7), Dickson (8) et Winckler (9).

De l'ensemble de mes observations, il résulte que les Renonculacées appartiennent à deux types de germination quant à la durée (10) et à six types quant à la forme des plantules.

(1) Klebs, *Beiträge zur Morphologie und Biologie der Keimung.* (Pfeffer's Unters. a. d. bot. Inst. zu Tübingen, Bd I, 1881-1885.)

(2) Massart, *loc. cit.*

(3) Lubbock, *A contribution to our knowledge of seedlings.* London, 1896.

(4) Irmisch, *Morphologie der Knollen- und Zwiebelgewachse*, 1850, et *Ueber einige Ranunculaceen.* (Bot. Zeit., 1856.)

(5) De Janczewski, *loc. cit.*

(6) Hildebrand, *Einige Beobachtungen an Keimlingen und Stecklingen.* (Bot. Zeit., Januar 1892.)

(7) Wichura, *Ueber Keimpflanzen von Anemone.* (Verh. der Schles. Gesell. f. Vat. C., 1856.)

(8) Dickson, *Germination of Delphinium.* (Journal of Botany, 1872.)

(9) Winckler, *Die Keimpflanze des Isopyrum thalictroides.* (Flora, 1884.) Cet auteur figure aussi la germination d'*Anemone nemorosa.*

(10) Le début de la germination est marqué par le réveil de l'embryon sous l'influence des agents extérieurs ; la fin, par l'épuisement des réserves nutritives de l'albumen (quand la graine est albuminée) ou des cotylédons (quand la graine est exalbuminée).

A. Quant a la durée :

1° *Germination rapide*, s'il existe deux cotylédons épigés. Ceux-ci sortent de terre quelques semaines après le semis, et les premières feuilles se développent bientôt après. (La plupart des espèces de cette famille.)

2° *Germination lente*, s'il existe deux cotylédons hypogés ou si l'embryon est homogène.

Dans le cas où les cotylédons sont hypogés, l'embryon s'accroit dans l'albumen pendant l'été, forme une gemmule et pousse la radicule hors de la graine pendant l'automne. Au printemps suivant, les premières feuilles se montrent à la surface du sol (*Paeonia, Clematis viticella*).

Dans le cas où l'embryon est homogène, il achève son développement dans la graine et y forme ses cotylédons, sa gemmule et sa radicule. Celle-ci perce seulement le spermoderme à l'automne qui suit le semis (*Eranthis*, Anémones à embryon homogène, *Hepatica triloba*) ou même à l'automne de l'année suivante (*Ficaria*). La plantule arrive au jour au printemps qui suit la sortie de la radicule. Elle ne comprend au-dessus du sol que les cotylédons si ceux-ci sont épigés (*Eranthis, Anemone apennina, Hepatica triloba, Ficaria*) ; que la première ou les premières feuilles si les cotylédons sont hypogés (*Anemone nemorosa, A. ranunculoides, A. trifolia*) (1).

(1) On ne doit pas conclure de ces indications relatives aux Renonculacées que la germination est lente pour toutes les graines (albuminées ou non) à cotylédons hypogés. Cela est vrai seulement des graines albuminées (*Paeonia, Clematis viticella*), dont les cotylédons, fort petits, doivent absorber la nourriture renfermée dans l'albumen et grandir avant de pouvoir subvenir aux besoins des premières feuilles ; celles-ci n'apparaissent au-dessus du sol qu'au printemps de l'année suivante. Dans les graines exalbuminées, au contraire, ayant, de même que le *Paeonia* et le *Clematis viticella*, les cotylédons hypogés, ceux-ci, fort gros et déjà gorgés de réserves puisées dans l'albumen au cours de la maturation de la graine, sont aptes à nourrir abondamment la gemmule et à lui permettre d'envoyer ses feuilles dans l'air quelques semaines après le semis (*Pisum, Faba*, etc.). En résumé, la germination des graines à cotylédons hypogés est lente ou rapide selon que ces graines sont albuminées ou exalbuminées.

B. Quant a la forme des plantules :

1° Cotylédons épigés, élaborateurs, grandissant beaucoup lors de la germination, à pétioles libres, plus ou moins allongés, tirant les limbes hors de la graine. Racine principale croissant modérément ou fort. Hypocotyle plus ou moins long, en partie souterrain, amenant dans l'air les cotylédons et la gemmule. *Nigella*, certaines espèces de *Clematis* (*vitalba*, *integrifolia*), *Atragene*, beaucoup d'espèces d'*Anemone* (*Pulsatilla*, *sylvestris*, *stellata*, *pavonina*, *virginiana*, *vitifolia*, *patens*, *Hudsoniana*, *multifida*, *pensylvanica*, *decapetala*), *Hepatica triloba*, *Adonis*, *Helleborus*, *Garidella*, la plupart des *Delphinium*, *Aconitum*, *Aquilegia*, *Actaea*, *Cimicifuga*, *Caltha*, *Trollius*, c'est-à-dire la majorité des Renonculacées ;

2° Comme dans le type 1, sauf que la racine principale croît peu et finit même par disparaître, supplantée par des racines adventives poussant à la limite inférieure de l'hypocotyle. La plupart des *Ranunculus*, *Myosurus*, *Ceratocephalus* ;

3° Cotylédons épigés, élaborateurs, concrescents jusqu'au milieu ou au sommet du pétiole par les deux bords. Pétioles cotylédonaires simulant un hypocotyle, longs, en grande partie aériens, amenant les limbes dans l'air. Hypocotyle court, souterrain, souvent tubérisé. Premières feuilles déchirant le tube cotylédonaire de chaque côté à la base. *Anemone coronaria*, *A. hortensis*, *Delphinium nudicaule* ;

4° Comme au type 3, sauf que les cotylédons sont concrescents jusqu'au milieu ou au sommet du limbe par un bord seulement, ce qui fait que les premières feuilles peuvent sortir sans provoquer de déchirure. *Ficaria*, *Eranthis*, *Anemone apennina* ;

5° Cotylédons hypogés, mais sortant de la graine ; ils servent exclusivement de réservoirs nutritifs. Hypocotyle court, souterrain. Tige principale et premières feuilles naissant dans le sol. Certaines espèces d'*Anemone* (*nemorosa*, *trifolia*, *ranunculoides*) ;

6° Comme dans le type 5, sauf que les cotylédons restent emprisonnés dans le spermoderme. *Paeonia*, *Clematis viticella* (1).

(1) Dans les quatre premiers types de germination, les cotylédons des Renonculacées sont essentiellement élaborateurs : on sait qu'il en est ainsi dans toutes les graines albuminées à cotylédons épigés (*Plantago*, *Hibiscus*,

On voit que la situation des cotylédons peut varier d'une espèce à l'autre d'un même genre. Elle peut même varier dans une espèce donnée. Ordinairement épigés dans le *Clematis flammula*, les cotylédons restent parfois sous terre, emprisonnés dans le spermoderme. J'ai rencontré des cotylédons hypogés dans le *Clematis recta*. M. Lubbock, dans son ouvrage sur la vie des plantes, les décrit de même, tandis que M. Irmisch a observé que les cotylédons épais et ordinairement épigés du *Clematis recta* et du *Clematis corymbosa* restent parfois sous terre. De son côté, M. Bonnier (1) a remarqué que des graines prises sur la même inflorescence d'un *Thalictrum minus* et semées dans des conditions différentes de sol, d'humidité, de température et de saison, ont donné des plantules à cotylédons presque hypogés et d'autres à cotylédons épigés. Il est naturellement impossible de classer ces Renonculacées à germination variable dans l'une ou l'autre des catégories précédentes.

Au sujet des germinations des types 3 et 4, on peut se demander quelle est l'utilité de la concrescence cotylédonaire. Dans les plantules où cette concrescence a lieu, on remarque que l'hypocotyle est court et tubérisé : ce sont les pétioles cotylédonaires qui doivent s'allonger pour porter les limbes dans l'air. Dans ces conditions, ces pétioles semblent s'unir pour traverser le sol plus facilement, se soutenir et supporter les limbes.

La plupart des traités de botanique reconnaissent deux modes généraux de germination : la germination à cotylédons épigés et la germination à cotylédons hypogés, dans laquelle les cotylédons restent emprisonnés dans le spermoderme. D'après ce qui précède, il y aurait peut-être lieu de distinguer une troisième catégorie : la germination à cotylédons hypogés sortant de la graine.

Conifères, etc.). Dans les types 5 et 6, les cotylédons servent uniquement de réservoirs : il en est de même dans toutes les graines à cotylédons hypogés (*Citrus*, Cycadées, *Smilax*, Viciées, *Aesculus*, *Quercus*, *Juglans*, etc.). On sait aussi qu'il existe une troisième catégorie de graines, dans lesquelles les cotylédons sont destinés au double rôle de réservoirs nutritifs pendant la germination et d'organes élaborateurs après : ce sont les graines exalbuminées à cotylédons épigés (*Astragalus*, *Phaseolus*, *Fagus*, Crucifères, Cucurbitacées, etc.).

(1) Bonnier, *Revue gén. de botanique*, t. I.

IV. — COTYLÉDONS.

Forme. 1° *Cotylédons épigés.* — Pétiole étroit et plus ou moins allongé, sauf dans le *Myosurus* et le *Ceratocephalus*, où il est large et court, peu distinct du limbe.

Limbe mince, entier, quelquefois un peu échancré ou très légèrement mucroné à son sommet, n'ayant jamais la forme ni des premières feuilles, ni celle des feuilles de la plante adulte. Chez les espèces aquatiques ou marécageuses, il est petit (*Ranunculus divaricatus* et *R. sceleratus; Caltha palustris*). Il est au contraire large, ovale, arrondi ou cordé à la base chez les espèces terrestres.

2° *Cotylédons hypogés.* — Limbe épais, surtout quand il reste emprisonné dans le spermoderme.

Insertion. — Chez la grande majorité des Renonculacées, chaque cotylédon s'insère sur l'hypocotyle par trois faisceaux L, M, L qui se fusionnent à leur sortie. Dans quelques espèces seulement (*Ficaria ranunculoides, Clematis integrifolia, Clematis viticella*), les cotylédons reçoivent chacun cinq faisceaux (*m*, $\widetilde{\text{LML}}$, *m*).

Histologie. — Parenchyme palissadique plus ou moins bien caractérisé (à une ou deux couches) à la face interne, et parenchyme spongieux à la face externe, sauf dans les cotylédons souterrains (*Paeonia, Anemone nemorosa*) ou aquatiques (*Ranunculus divaricatus*), dont le mésophylle est homogène.

Stomates à la face externe seulement ou sur les deux faces, toujours formés de deux cellules de bordure au niveau de l'épiderme avec deux replis de la cuticule surmontant l'ostiole. Pas de stomates dans les cotylédons hypogés.

Pas de poils, sauf dans quelques genres (*Aconitum, Actaea, Thalictrum*).

Sommet pourvu ou non d'une glande à eau.

On voit qu'une corrélation existe entre l'épaisseur des cotylédons et leur structure. Les cotylédons épais ont un parenchyme homogène et un épiderme sans stomates. A des coty-

lédons minces, au contraire, correspondent l'existence d'une couche palissadique et des stomates plus ou moins nombreux. Cette remarque a été faite aussi par M. Godfrin (1).

Nervation. — La nervation du limbe est renseignée dans le tableau suivant :

- Une seule nervure. . . . . *Myosurus minimus* (fig. 124).
- Trois nervures principales distinctes dès la base du limbe ; pas de nervures marginales ; nervures secondaires non réticulées.
  - *Caltha palustris* (fig. 213).
  - *Trollius europæus* (fig. 220).
  - *Ranunculus cherophyllos* (fig. 144)
  - *Ranunculus sceleratus* (fig 143).
  - *Anemone nemorosa* (fig 106).
  - *Isopyrum fumaroïdes* (fig. 276).
- Cinq nervures principales, savoir : *L*, *M*, *L*, distinctes vers la base du limbe, et *m* et *m* (nervures marginales) se rattachant :
  - à la base du limbe à $\widetilde{LML}$ ou à *L* et *L* déjà séparés de *M*.
    - *m* et *m* rejoignent le sommet du limbe. Nervures secondaires réticulées.
      - *Aquilegia vulgaris* (fig. 271).
      - *Ranunculus muricatus* (fig. 146).
      - *Ranunculus acris* (fig. 142).
      - *Ranunculus chius.*
      - *Ranunculus tuberosus.*
      - *Aconitum uncinatum* (fig. 296).
      - *Eranthis hiemalis* (fig. 251).
      - *Hepatica triloba* (fig. 110).
    - *m* et *m* ne rejoignent pas le sommet du limbe. Nervures secondaires non réticulées.
      - *Cimicifuga racemosa* (fig. 301).
      - *Anemone Pulsatilla* (fig. 105).
      - *Thalictrum flavum.*
    - Peu ou pas de nervures secondaires (nervation parallèle).
      - *Ceratocephalus falcatus* (fig. 126)
      - *Adonis automnalis* (fig. 115).
  - vers le milieu ou la base du pétiole à $\widetilde{LML}$
    - et rejoignant le sommet du limbe. Nervures secondaires réticulées.
      - *Nigella damascena* (fig. 49).
      - *Ranunculus arvensis.*
      - *Ranunculus cornutus* (fig. 147).
      - *Ranunculus creticus.*
      - *Actaea spicata.*
    - ne rejoignant pas le sommet du limbe. Nervures secondaires non réticulées.
      - *Nigella arvensis* (fig. 268).
      - *Helleborus fœtidus* (fig. 258).
      - *Garidella nigellastrum* (fig. 263).
      - *Paeonia officinalis* (fig. 311).
      - *Clematis vitalba.*
      - *Atragene alpina.*
  - dans l'hypocotyle aux caulinaires. . . .
    - *Clematis viticella.*
    - *Clematis integrifolia.*

Il résulte de l'examen de ce tableau que :

1° La nervation des cotylédons est fort variable d'un genre à l'autre ;

(1) Godfrin, *Recherches sur l'anatomie comparée des cotylédons et de l'albumen.* Paris, Masson, 1884.

2° Elle n'est pas constante dans un même genre, même pour des espèces vivant dans le même milieu (*Nigella*, Renoncules terrestres);

3° Elle est uninerve, parallélinerve ou le plus souvent penninerve. Dans ce dernier cas, selon que les nervures marginales atteignent ou non le sommet du limbe, les nervures pennées sont réticulées ou non;

4° Les plantes terrestres ont souvent des cotylédons à nervation compliquée, caractère que l'on ne trouve jamais chez les espèces aquatiques ou marécageuses : des cotylédons larges, à nervures nombreuses, seraient inutiles aux plantes vivant dans l'eau. On peut en tirer cette conclusion, que les cotylédons s'adaptent au milieu dès le début de la germination;

5° Il n'existe pas de faisceaux intermédiaires à la base du limbe entre la nervure médiane et les nervures latérales.

Concrescence. — Les pétioles cotylédonaires, dans la plupart des Renonculacées, sont libres dès leur base ou ne présentent qu'une légère concrescence par les deux bords dans leur partie inférieure. Chez quelques espèces, la concrescence par les deux bords s'étend jusqu'au milieu (*Anemone hortensis*) ou au sommet des pétioles (*Anemone coronaria, Delphinium nudicaule*), et dans ces deux cas les premières feuilles, à leur sortie, déchirent le tube cotylédonaire de chaque côté. Chez d'autres espèces, enfin, la concrescence des cotylédons s'opère par un bord seulement jusqu'au milieu (*Anemone apennina*) ou au sommet des limbes (*Eranthis, Ficaria*), et alors les premières feuilles sortent sans provoquer de déchirure.

La concrescence des cotylédons chez ces Renonculacées paraît fixée : je n'y ai pas trouvé de plantules à cotylédons libres. Il en est ainsi dans beaucoup d'espèces d'autres familles dont j'ai eu l'occasion de voir des plantules (*Smyrnium olusatrum, Smyrnium perfoliatum, Ferula thyrsiflora, Ferula tingitana, Macrozamia plumosa*). Chez d'autres, au contraire, à côté d'individus à cotylédons plus ou moins concrescents, j'en ai trouvé dont les cotylédons étaient complètement libres (*Helianthus annuus, Chaerophyllum temulum, Caragana pygmea*).

Plusieurs auteurs ont admis que la Ficaire n'a qu'un cotylédon; d'autres, qu'elle en est complètement dépourvue.

Pour Irmisch, cité par Darwin (1), cette plante n'a « jamais deux cotylédons développés ». De l'examen de la Ficaire et de quelques autres plantules de Dicotylées, Darwin infère qu'il y a « une connexion intime entre la réduction de la taille d'un des cotylédons ou de ces deux organes et la formation, par épaississement de l'hypocotyle ou de la radicule, de ce qu'on nomme un bulbe ». Ce serait là, ajoute-t-il, une confirmation du principe de compensation ou de balancement de la croissance énoncé par Gœthe : « Afin de pouvoir dépenser d'un côté, la nature est forcée d'économiser de l'autre ».

Cette explication est séduisante, mais en ce qui concerne la Ficaire, elle est en contradiction avec l'anatomie qui démontre que cet organe unique est double en réalité. D'ailleurs, des plantules ayant manifestement deux cotylédons concrescents peuvent présenter aussi un hypocotyle tubérisé (*Delphinium nudicaule*), tandis que des plantules à cotylédon en apparence unique et brièvement pétiolé peuvent avoir un hypocotyle long, non tubérisé (*Helianthus annuus*, var. *syncotyleus*). Tout ce que l'on peut dire, c'est que la concrescence des pétioles cotylédonaires allongés est concomitante avec l'existence d'un hypocotyle court, et que c'est ce dernier caractère qui décide de la concrescence, ainsi que je l'ai expliqué page 81.

Dans les observations qu'il a publiées en 1866 sur la Ficaire, M. Van Tieghem dit que cette plante « paraît germer avec un seul cotylédon ». Dans son *Traité de Botanique*, 2me édition (1891), page 949, ce botaniste va plus loin et affirme que la Ficaire « n'a pas de cotylédon ». Or, l'étude de l'embryon en voie de développement prouve l'existence d'un organe cotylédonaire au-dessus de l'hypocotyle. Quand cet organe est complètement développé, on peut se convaincre par l'examen de la forme de son limbe et de sa nervation qu'il est formé par la concrescence de deux cotylédons.

(1) Darwin (trad. fr. par Ed. Heckel), *La faculté motrice dans les plantes*. Paris, 1882, p. 93.

V. — PREMIÈRES FEUILLES.

Forme. — Chez les Renonculacées à cotylédons épigés, les premières feuilles ne diffèrent pas sensiblement des feuilles suivantes. On remarque seulement que leur taille est plus petite et leur forme plus simple par suite de la diminution du nombre des parties. Dans le *Clematis vitalba*, par exemple, on trouve d'abord des feuilles simples et dentées, puis des feuilles trilobées et enfin des feuilles à trois et à cinq folioles (1). Parfois, les feuilles de la plantule présentent le même aspect que les feuilles de la plante adulte, ce qui semble provenir d'un arrêt de développement de la plante dans son ensemble (*Myosurus*).

Chez certaines espèces à cotylédons hypogés restant emprisonnés dans le spermoderme, comme le *Clematis viticella*, le *C. flammula* et le *C. recta*, les premières feuilles sont très petites, écailleuses. Ce caractère est tellement bien fixé par l'hérédité, qu'il persiste lorsque les cotylédons sont amenés à la surface du sol, comme cela arrive parfois dans le *C. flammula* et le *C. recta*. La réduction des premières feuilles doit être considérée comme un caractère d'adaptation permettant à la plantule de traverser facilement le sol, et non comme une récapitulation. Aucune Renonculacée n'offre dans la forme de ses premières feuilles un stade récapitulatif. D'après M. Massart, les exemples de récapitulation sont d'ailleurs rares chez les végétaux.

Quelques espèces de Renonculacées à cotylédons hypogés restant emprisonnés dans le spermoderme, possèdent des premières feuilles bien développées : c'est le cas pour le *Paeonia officinalis* (fig. 302). Ce fait est dû sans doute à l'abondance des réserves nutritives de l'albumen permettant à la plantule d'acquérir une grande vigueur avant d'arriver à la surface du sol.

Les premières feuilles des espèces grimpantes (*Clematis*

(1) J. Massart (*loc. cit.*) a aussi démontré que la diminution de la taille d'un organe est due à la « diminution du nombre des parties semblables et non à la réduction de la taille des diverses parties ».

vitalba) n'enroulent pas leur pétiole : ce caractère n'apparaît qu'à l'époque où la tige longue et sarmenteuse a besoin de se soutenir (1).

Disposition. — Les premières feuilles — comme d'ailleurs les feuilles de la plante adulte — sont alternes dans la plupart des genres. La spire phyllotaxique est tantôt dextre, tantôt senestre. L'angle de divergence est de $^2/_5$.

Dans l'*Atragene alpina*, les feuilles des premiers nœuds, tout en étant opposées, apparaissent successivement dans chaque paire, ont une taille inégale à l'état adulte et s'insèrent à des niveaux légèrement différents. Les *fe* 1, 2, 3..., les plus anciennes de chaque paire, sont rejetées d'un côté; les *fe* I, II, III..., les plus récentes de chaque paire, de l'autre : disposition qui se rapproche de la disposition distique. A partir du cinquième ou du sixième nœud, elles sont distinctement opposées-décussées.

Dans le genre *Clematis*, les deux feuilles des six ou sept premiers nœuds sont aussi de grandeur différente et ne s'insèrent pas au même niveau ; on peut faire passer une spirale régulière par les feuilles 1, 2, 3... ou les feuilles I, II, III... En outre, il arrive que certains nœuds ne portent qu'une feuille, l'autre ayant été reportée au nœud suivant. Enfin, l'existence assez fréquente de cinq gros faisceaux et de cinq côtes aux premiers entre-nœuds des tiges principales, rappelle d'une façon étonnante la disposition par cinq que l'on observe chez plusieurs Renonculacées à feuilles alternes, notamment le *Ranunculus arvensis*. Ces faits constituent un retour atavique ; ils démontrent que la disposition opposée-décussée du *Clematis* n'est pas primordiale, mais que le type décussé provient d'ancêtres à feuilles spiralées (2).

Dans le *Myosurus* et le *Ceratocephalus*, les feuilles sont comme fasciculées au sommet de l'hypocotyle, la tige principale restant courte jusqu'à l'époque de la floraison.

(1) Il en est de même, d'après M. Massart, des plantes à vrilles foliaires. « Les feuilles primaires, dit-il, ne fonctionnent pas comme vrilles ».

(2) Pour plus de développement, voir mon mémoire sur les Clématidées, *Ann. Soc. des sciences de Liége*, 2e sér., t. XX, et *Archives de l'Inst. bot. de l'Univ. de Liége*, vol. I.

Insertion. — Les feuilles 1 et 2 reçoivent un, deux ou trois faisceaux ; les suivantes, un, deux, trois ou un plus grand nombre.

Nervation. — Elle est fort variable, comme le montre le tableau suivant relatif à la nervation de la feuille 1. A la base du limbe, il y a :

Une seule nervure	*Myosurus minimus* (fig. 127).
Une nervure médiane et deux latérales se rattachant à la médiane à la base du limbe	*Isopyrum fumaroides* (fig. 277). *Ranunculus sceleratus* (fig. 145).
Une nervure médiane, deux latérales et deux marginales, les latérales se rattachant à la médiane à la base du limbe; les marginales se rattachant aux latérales ou à la médiane à la base du limbe, ou à la médiane à la base du pétiole ou pénétrant dans la tige	*Ranunculus acris* (fig. 149). *Ranunculus cherophyllos* (fig. 148). *Ranunculus muricatus.* *Ceratocephalus falcatus* (fig. 129). *Anemone apennina* (fig. 107). *Nigella damascena* (fig. 54). *Hepatica triloba* (fig. 111). *Ficaria ranunculoides* (fig. 203). *Aconitum uncinatum* (fig. 298).
Une nervure médiane, deux latérales, deux marginales et deux intermédiaires, les latérales et les marginales se comportant comme dans le cas précédent, les intermédiaires se rattachant aux latérales à la base du limbe	*Caltha palustris* (fig. 215). *Eranthis hiemalis* (fig. 253). *Aquilegia vulgaris* (fig. 272).

En comparant la feuille 1 au cotylédon, on voit que la nervation de ces deux appendices est établie sur le même plan général. Les différences qui peuvent exister consistent en ce que :

1° Les nervures marginales de la feuille 1 sont distinctes jusqu'à la base du pétiole, au lieu de se détacher de la base du limbe comme dans les cotylédons correspondants (*Ceratocephalus falcatus*, *Hepatica triloba*, *Aconitum uncinatum*, etc.);

2° Les nervures marginales existent dans la feuille 1 (*Ranunculus cherophyllos*, *Caltha palustris*), alors qu'elles font défaut dans les cotylédons correspondants ;

3° Les nervures intermédiaires, qui peuvent exister dans la feuille 1 (*Eranthis hiemalis*, *Aquilegia vulgaris*, *Caltha palustris*, etc.), manquent toujours dans les cotylédons.

Mais ce sont là des différences d'ordre secondaire qui proviennent de ce que la feuille 1 possède généralement une taille plus grande et une forme plus compliquée que les cotylédons.

Histologie. — Les caractères histologiques des premières feuilles sont assez constants.

1° *Épiderme.* — Cellules sans chlorophylle, à cuticule lisse, plus grandes à la face interne qu'à l'externe. Stomates sur les deux faces ou à la face externe seulement, de même structure que dans les cotylédons. Chambre stomatique formée par un grand méat. Vu de face, l'épiderme présente des cellules à contour sinueux, des stomates arrondis, sans cellules annexes. Sur les nervures, les cellules épidermiques, presque rectangulaires, sont allongées dans le sens de la longueur des nervures.

2° *Mésophylle.* — Hétérogène. Une ou deux assises de cellules en palissades ; trois ou quatre assises de cellules irrégulières, à grands méats, constituant le parenchyme spongieux. Chlorophylle dans tout le mésophylle. Pas de cristaux.

3° *Nervures.* — Elles sont constituées par un seul faisceau.

Beaucoup de genres présentent des poils (*Clematis, Thalictrum, Anemone, Hepatica, Ranunculus, Delphinium, Aconitum, Actaea*). Quelques-uns possèdent des glandes à eau (*Delphinium, Caltha, Thalictrum, Helleborus*).

VI. — TIGE PRINCIPALE.

Caractères extérieurs. — La tige principale des Renonculacées est entièrement aérienne dans les espèces qui germent selon les types 1 et 2, en tout ou en partie souterraine dans les quatre autres types. Lorsqu'elle est aérienne, les cinq ou six premiers entre-nœuds restent courts.

Structure. — Ses faisceaux débutent dans le collet interne par quatre réparateurs A, B, C, D et deux foliaires médians destinés aux deux premières feuilles.

La tige principale n'atteignant pas dans les plantules un développement suffisant, son étude histologique n'a pas été abordée.

VII. — RACINES.

Caractères extérieurs. — Dans la plupart des Renonculacées, la racine principale devient prédominante et pivotante. Elle reste au contraire grêle et courte, et se trouve supplantée par de nombreuses racines adventives développées à la limite inférieure de l'hypocotyle chez le *Myosurus*, le *Ceratocephalus* et beaucoup d'espèces du genre *Ranunculus*.

Des racines adventives apparaissent en outre au nœud cotylédonaire dans un assez grand nombre d'espèces (*Thalictrum*, *Anemone pensylvanica*, *Anemone sylvestris*, *Hepatica triloba*, *Ranunculus*, *Caltha*). Il s'en forme même parfois le long de l'hypocotyle (*Hepatica triloba*).

Les portions suffisamment âgées des racines se contractent à la fin de la saison et mettent en terre l'hypocotyle et les premiers nœuds de la tige principale. Ce phénomène est surtout manifeste chez les Renonculacées vivaces, comme l'ont démontré M. Mansion pour le *Thalictrum flavum*, et M. Lenfant pour le *Delphinium elatum*.

Histologie. *Racine principale.* — Faisceau bipolaire, rarement à trois ou quatre pôles. Décortication précoce du parenchyme cortical. Endoderme avec ou sans plissements.

L'existence ou l'absence de plissements dans l'endoderme des plantules n'est pas toujours générale dans un même genre. Les genres *Clematis*, *Adonis* et *Nigella*, par exemple, présentent des espèces à endoderme plissé et d'autres à endoderme sans plissements.

Radicelles et *racines adventives.* — Deux, trois ou quatre pôles. Parenchyme cortical le plus souvent persistant. Productions secondaires très peu abondantes ou nulles.

Racines adventives du Ficaria ranunculoides. — Dans le *Ficaria ranunculoides*, des racines adventives se tubérisent et forment des tubercules souterrains et des tubercules aériens ou bulbilles.

L'origine et la structure de ces tubercules ont été l'objet de nombreuses observations.

Pour Aimé Martin (1) et Clos (2), il y a deux sortes de tubercules : les tubercules-bourgeons et les tubercules-racines, les premiers pourvus près de leur base d'insertion d'un bourgeon qui manque aux derniers; chez ceux-ci, il se forme, au printemps suivant, sur un point analogue, un bourgeon adventif.

M. Germain de Saint-Pierre (3) assigne le premier à tous les tubercules une origine radiculaire, mais il nie que les tubercules-racines soient pourvus chacun d'un bourgeon.

Pour M. Irmisch (4), « la signification radiculaire de ces tubercules a plus de raison pour elle que leur signification axile ». Il reconnaît en outre que tous ont un bourgeon.

D'après M. Sachs (5), il se forme après le développement de la racine principale, « au-dessous de l'axe primaire, une racine adventive renflée en tubercule et entourée d'une gaine à sa base, racine qui se conserve en même temps que le bourgeon qui la surmonte, pendant que la racine principale et les premières feuilles se détruisent ».

Enfin, pour M. Van Tieghem (6), tous les tubercules sont formés d'une racine née sur un bourgeon.

J'ai montré qu'il en est réellement ainsi pour les tubercules qui naissent dans le sol, et je pense que les tubercules aériens n'ont pas une autre origine. La seule différence résiderait dans ce fait que les premiers prennent naissance sur un bourgeon

(1) Aimé Martin, *Etwas über Knospen mit knolliger Basis.* (Verhandlungen des naturhistorischen Vereines der preussischen Rheinlande und Westphalien, 7e année, 1850.)

(2) Clos, *Étude organographique de la Ficaria.* (Ann. des sc. nat., 3e sér., t. XVII, 1852.)

(3) Germain de Saint-Pierre, *Journal de l'Institut,* janvier 1852, et *Bulletin de la Société botanique,* t. III, 1856.

(4) Irmisch, *Zur Morphologie der Monocotyledonen Knollen- und Zwiebel-Gewächse,* en note, p. 229, 1850.

(5) Sachs, *Traité de botanique,* 1874.

(6) Van Tieghem, *loc. cit.*

adventif, tandis que les seconds se développent sur un bourgeon axillaire.

D'après Clos et M. Van Tieghem, les pieds dépourvus de tubercules axillaires produisent seuls des graines fécondes et les pieds bulbilifères seraient toujours stériles. M. Van Tieghem attribue cette stérilité à l'absence de pollen bien constitué. « Les cellules mères de pollen, au lieu de donner naissance aux grains ordinaires pour se résorber ensuite, ont, en se vidant, épaissi et ponctué leurs parois » et se sont réunies en une « longue masse fusiforme ». Cet auteur ajoute qu'il existe des caractères permettant de distinguer dès le plus jeune âge une plante de la variété fertile et une plante de la variété stérile. Ces caractères peuvent « se résumer en un excessif développement, chez la Ficaire stérile, de l'appareil végétatif et des racines adventives tuberculeuses, circonstance qui s'explique par les conditions de milieu où cette plante croît spontanément ».

Il existe une troisième race de *Ficaria* au Jardin botanique de Liége. Des observations qui y ont été faites, et que j'ai rapportées page 42, il résulte que les pieds bulbilifères y portent des étamines fertiles et forment des graines fécondes : on n'y a jamais vu ces longues masses fusiformes de cellules ponctuées dont parle M. Van Tieghem. Les pieds cultivés en plates-bandes, en plein soleil, dans un terrain sec, ne sont pas différents de ceux qui poussent spontanément au bord de l'étang, dans la pelouse et à l'ombre : on trouve des deux côtés des germinations spontanées au printemps et des bulbilles sur tous les pieds. Souvent plusieurs plantules sont tellement voisines qu'on peut les supposer produites par les graines d'un même fruit. Celui-ci est d'ailleurs enterré par la plante elle-même, car les pédoncules, dressés pendant la floraison, s'étalent plus tard horizontalement sur le sol et finissent par se courber vers le bas à leur extrémité un peu avant la maturité du fruit.

ERRATA. — Page 25, ligne 4, au lieu de 7, lire *0,7* et au lieu de *3*, lire *0,3*.

ABRÉVIATIONS.

A. h.	Axe hypocotylé.
Alb.	Albumen.
Ass. pil.	Assise pilifère.
Ass sous-pil.	Assise sous pilifère.
Aut.	Autour.
B^1.	Bois primaire.
B^2.	Bois secondaire.
Bg.	Bourgeon.
Bg. adv.	Bourgeon adventif.
Cal.	Calyptrogène.
Cav.	Cavité.
Cb.	Cambium.
Cbf.	Cambiforme.
Cf.	Coiffe.
Cont.	Contact.
Cot. a.	Cotylédon antérieur.
Cot. p.	Cotylédon postérieur.
Cyl. cent.	Cylindre central.
Dmtg.	Dermatogène.
End.	Endoderme.
Ep.	Épiderme.
ext.	Externe.
Faisc. caul.	Faisceau caulinaire.
Fais. cot.	Faisceau cotylédonaire.
Fe.	Feuille.
Fl.	Fleur.
int.	Interne.
Gr.	Graine.
L.	Faisceau latéral.
L^1.	Liber primaire.
L^2.	Liber secondaire.
L. cot.	Latéral cotylédonaire.
Lib.	Liber.
Lib. cot.	Liber cotylédonaire.
M.	Faisceau médian.
M. cot.	Faisceau médian cotylédonaire.
m.	Faisceau marginal.
M. p.	Méristème primitif.
P. lib.	Pôle libérien.
Par. cort.	Parenchyme cortical.
Pcb.	Procambium.
Péric.	Péricycle.
Rad.	Radicule.
Radi.	Radicelle.
R p.	Racine principale.
S.	Suspenseur.
Sub.	Suber.
t^1.	Trachée initiale.
T. c.	Trachée du faisceau cotylédonaire.
Tf^{2e}.	Tissu fondamental, secondaire externe.
Tf^{2i}.	Tissu fondamental secondaire interne.
t. R.	Trachée du faisceau de la racine.

EXPLICATION DES PLANCHES.

EXPLICATION DE LA PLANCHE I

NIGELLA DAMASCENA.

L'embryon dans la graine mûre (page 5).

Fig. 1. — Extrémité inférieure de l'embryon (niveau de la coiffe).
Fig. 2. — Radicule.
Fig. 3. — Collet superficiel.
Fig. 4. — Milieu de l'hypocotyle.
Fig. 5. — Collet interne.

Caractères extérieurs des plantules (page 9).

Fig. 8. — Stade I de la germination.
Fig. 9. — » II »
Fig. 10. — » III »

EXPLICATION DE LA PLANCHE II.

NIGELLA DAMASCENA.

L'embryon dans la graine mûre (suite).

Fig. 6. — Milieu des cotylédons.
Fig. 7. — Coupe longitudinale suivant le plan principal de symétrie.

Caractères extérieurs des plantules (suite).

Fig. 11. — Stade IV de la germination.
Fig. 12. — » V »
Fig. 13. — » VI »

Structure au milieu de l'hypocotyle (page 9).

Fig. 14. — Au stade I.
Fig. 15. — » II.
Fig. 16. — » III.
Fig. 17. — » IV.
Fig. 17bis. — Portion périphérique au stade IV.

EXPLICATION DE LA PLANCHE III.

NIGELLA DAMASCENA.

Structure au milieu de l'hypocotyle (suite).

Fig. 18. — Au stade V.
Fig. 19. — » VI.

Structure à la limite inférieure de l'hypocotyle (page 10).

Fig. 20. — Coupe dans le collet superficiel traversant à la fois la base de l'hypocotyle et le haut de la racine principale au stade II.
Fig. 21. — Coupe longitudinale dans le collet superficiel.

Structure dans la région d'insertion des cotylédons (page 10).

Fig. 22. — Schémas de la structure pendant la première période.
A, 1er niveau (en dessous du nœud cotylédonaire);
B, 2^{e} niveau (moitié inférieure du nœud cotylédonaire);
C, 3^{e} niveau (moitié supérieure du nœud cotylédonaire).
Fig. 23. — Schémas de la structure pendant la 2^{e} période.
Fig. 24. — » » » 3^{e} »
Fig. 25, 26, 27. — Coupes successives dans le nœud cotylédonaire pendant la première période.

EXPLICATION DE LA PLANCHE IV.

NIGELLA DAMASCENA.

Structure dans la région d'insertion des cotylédons (suite).

Fig. 28 et 29. — Coupes successives dans le nœud cotylédonaire pendant la première période. (Ces figures font suite aux figures 25, 26, 27 de la planche précédente.)

Fig. 30. — Figure schématique montrant au pôle antérieur le contact des trachées 1 et 2 de l'hypocotyle avec les trachées 1 et 2 du cotylédon.

Fig. 31. — Base du cotylédon pendant la première période.

Fig. 32. — Coupe en dessous du premier niveau dans une graine en germination prise tout au début de la première période.

Fig. 33. — Coupe au premier niveau dans la même graine.

Fig. 34. — Base du cotylédon de la même graine.

Fig. 35 à 38. — Coupes successives dans le nœud cotylédonaire pendant la deuxième période.

EXPLICATION DE LA PLANCHE V.

NIGELLA DAMASCENA.

Structure dans la région d'insertion des cotylédons (suite).

Fig. 39 à 41. — Coupes successives dans le nœud cotylédonaire pendant la deuxième période. (Ces figures font suite aux figures 35 à 38 de la planche précédente.)

Fig. 42. — Base du pétiole cotylédonaire pendant la deuxième période.

Fig. 43. — Milieu du pétiole cotylédonaire pendant la deuxième période.

Fig. 44. — Moitié supérieure du pétiole cotylédonaire pendant la même période.

Fig. 45 et 46. — Coupes successives dans le nœud cotylédonaire pendant la troisième période.

Cotylédons (page 20).

Fig. 51. — Épiderme externe vu de face.
Fig. 52. — » interne »

EXPLICATION DE LA PLANCHE VI.

NIGELLA DAMASCENA.

Structure dans la région d'insertion des cotylédons (fin).

Fig 47. — Coupe dans le nœud cotylédonaire pendant la troisième période. (Cette figure fait suite aux figures 45 et 46 de la planche précédente).
Fig. 48. — Figure schématique résumant l'interprétation de M. Gérard et la mienne.

Cotylédons (fin).

Fig. 49. — Cotylédon complètement développé.
Fig. 50. — Milieu du limbe.

Premières feuilles (page 21).

Fig. 54. — Nervation de la feuille 1.
Fig. 55. — Feuille 2.
Fig. 56. — Coupe d'ensemble au niveau du bourgeon terminal au stade V.

EXPLICATION DE LA PLANCHE VII.

NIGELLA DAMASCENA.

Premières feuilles (fin).

Fig. 53 (*a, b, c, d, e*). — Diverses formes de la feuille 1.
Fig. 57. — Coupe d'ensemble au niveau du bourgeon terminal au stade VI.
Fig. 58. — Spire phyllotaxique d'une plantule ayant six feuilles visibles.

Fig. 59, 60, 61. — Milieu du pétiole dans des feuilles de plus en plus vigoureuses.
Fig. 62. — Faisceau médian du pétiole de la fe^1.
Fig. 63. — Milieu du limbe de la fe^1.
Fig. 64. — Épiderme interne de la même feuille.
Fig. 65. — » externe » »

Tige principale (page 24).

Fig. 66. — Parcours des faisceaux dans l'hypocotyle et la tige principale au stade VI.

EXPLICATION DE LA PLANCHE VIII.

NIGELLA DAMASCENA.

Tige principale (fin).

Fig. 67. — Projection horizontale des quatre premiers nœuds au stade VI.

Racine principale (page 24).

Fig. 68. — Racine principale au stade V.

GENRE *ANEMONE* (page 32).

Fig. 69. — Plantule d'*Anemone Pulsatilla*.
Fig. 70. — » d'*Anemone sylvestris*.
Fig. 71. — » d'*Anemone hortensis*.
Fig. 72 et 73. — Plantules d'*Anemone coronaria*.
Fig. 74 et 75. — » d'*Anemone nemorosa*.
Fig. 76 et 77. — » d'*Anemone apennina*.
Fig. 78. — Coupe longitudinale de l'embryon d'*Anemone narcissiflora*.
Fig. 86. — Milieu de l'hypocotyle d'*Anemone hortensis*.

EXPLICATION DE LA PLANCHE IX.

GENRE *ANEMONE* (suite).

Fig. 79. — Coupe transversale de l'embryon d'*Anemone narcissiflora* au-dessus du méristème primitif de la tige principale.

Fig. 80. — Embryon d'*Anemone nemorosa.*

Fig. 81. — Coupe transversale de l'akène d'*Anemone nemorosa.*

Fig. 82. — Coupe longitudinale de l'akène d'*Anemone ranunculoides.*

Fig. 83. — Coupe tranversale dans le suspenseur de l'embryon d'*Anemone nemorosa.*

Fig. 84. — Coupe transversale vers le milieu de l'hypocotyle du même embryon.

Fig. 85. — Coupe transversale un peu au-dessus du suspenseur de l'embryon d'*Anemone ranunculoides.*

Fig. 87 à 92. — Coupes successives dans l'hypocotyle, le nœud cotylédonaire et le bourgeon terminal d'*Anemone apennina.*

Fig. 93. — Parcours des faisceaux dans l'hypocotyle et la base de la tige principale de l'*Anemone apennina.*

Fig. 94 à 97. — Coupes successives au-dessus du nœud cotylédonaire de l'*Anemone hortensis* et de l'*Anemone coronaria.*

Fig. 98. — Coupe 96 vue à un plus fort grossissement.

EXPLICATION DE LA PLANCHE X.

GENRE *ANEMONE* (fin).

Fig. 99, 100 et 102. — Coupes successives au-dessus du nœud cotylédonaire de l'*Anemone apennina.*

Fig. 101. — Une partie de la figure 100 fortement grossie.

Fig. 103. — » » 102 » »

Fig. 104. — Coupe à la base des limbes cotylédonaires de l'*Anemone apennina.*

Fig. 105. — Cotylédon d'*Anemone Pulsatilla.*
Fig. 106. — » d'*Anemone nemorosa.*
Fig. 107. — Feuille 1 d'*Anemone apennina.*
Fig. 108. — Poil de la feuille 1 d'*Anemone apennina.*

HEPATICA TRILOBA (page 36).

Fig. 109. — Plantule d'*Hepatica triloba.*
Fig. 110. — Cotylédon.
Fig. 111. — Feuille 1.
Fig. 112. — Épiderme externe de la feuille 1.

GENRE *ADONIS* (page 37).

Fig. 113. — Plantule d'*Adonis annua.*
Fig. 114. — » d'*Adonis autumnalis.*
Fig. 115. — Cotylédon d'*Adonis autumnalis.*

EXPLICATION DE LA PLANCHE XI.

GENRE *ADONIS* (fin).

Fig. 116. — Projection des six premiers nœuds de l'*Adonis annua.*
Fig. 117. — Feuille 2 d'*Adonis autumnalis.*
Fig. 118. — Parcours des faisceaux dans l'hypocotyle et la base de la tige principale d'*Adonis annua.*

GENRES *MYOSURUS* ET *CERATOCEPHALUS* (page 38).

Fig. 119. — Plantule de *Myosurus minimus.*
Fig. 120. — Plantule de *Ceratocephalus falcatus.*
Fig. 121. — Coupe transversale de la graine de *Myosurus minimus.*
Fig. 122. — Coupe vers le bas de l'hypocotyle de l'embryon de *Myosurus minimus.*
Fig. 123. — Coupe dans la moitié supérieure d'un cotylédon du même embryon.

Fig. 124. — Cotylédon de *Myosurus minimus*.
Fig. 125. — Épiderme externe du même.
Fig. 126. — Cotylédon de *Ceratocephalus falcatus*.
Fig. 127. — Feuille 1 de *Myosurus minimus*.
Fig. 128. — Feuille 4 de *Myosurus minimus*.
Fig. 129. — Feuille 1 de *Ceratocephalus falcatus*.

EXPLICATION DE LA PLANCHE XII.

GENRES *MYOSURUS* ET *CERATOCEPHALUS* (fin).

Fig. 130. — Feuille 6 de *Ceratocephalus falcatus*.
Fig. 131. — Coupe dans le nœud cotylédonaire du *Myosurus minimus*.

GENRE *RANUNCULUS* (page 40).

Fig. 132. — Plantule de *Ranunculus cornutus*.
Fig. 133. — » » *tuberosus*.
Fig. 134. — » » *creticus*.
Fig. 135. — » » *asiaticus*.
Fig. 136. — » » *bulbosus*.
Fig. 137. — » » *cherophyllos*.
Fig. 138. — » » *chius*.
Fig. 139. — » » *acris*.
Fig. 140. — » » *muricatus*.
Fig. 141. — » » *sceleratus*.
Fig. 142. — Cotylédon de *Ranunculus acris*.
Fig. 143. — » » *sceleratus*.
Fig. 144. — » » *cherophyllos*.
Fig. 145. — Feuille 1 de *Ranunculus sceleratus*.

EXPLICATION DE LA PLANCHE XIII.

GENRE *RANUNCULUS* (fin).

Fig. 146. — Cotylédon de *Ranunculus muricatus*.
Fig. 147. — Cotylédon de *Ranunculus cornutus*.
Fig. 148. — Feuille 1 de *Ranunculus cherophyllos*.
Fig. 149. — Feuille 1 de *Ranunculus acris*.
Fig. 150. — Épiderme supérieur de la feuille 1 de *Ranunculus tuberosus*.

FICARIA RANUNCULOIDES (page 42).

Fig. 151. — Coupe transversale de l'akène de *Ficaria ranunculoides*.
Fig. 152. — Embryon dans la graine mûre.
Fig. 153. — Coupe transversale vers le tiers inférieur de l'embryon.
Fig. 154. — Embryon (*A*) deux mois après le semis (vu de face).
Fig. 155. — Le même vu de profil.
Fig. 156. — Embryon (*B*) quatre mois après le semis (vu de face).
Fig. 157. — Le même vu de dos.
Fig. 158. — Embryon (*C*) au milieu de l'année qui suit le semis.
Fig. 159. — Embryon (*D*) en automne de la même année.
Fig. 160. — Plantule (*E*) au printemps de la deuxième année qui suit le semis.
Fig. 161. — La même (*F*) quelques jours plus tard.
Fig. 162. — Plantule (*G*) ayant exceptionnellement développé la feuille 1 la même année que les cotylédons.

EXPLICATION DE LA PLANCHE XIV.

FICARIA RANUNCULOIDES (suite).

Fig. 163. — Milieu de l'hypocotyle au stade A.
Fig. 164. — Partie centrale de la coupe précédente fortement grossie.
Fig. 165. — Milieu de l'hypocotyle au stade F.

Fig. 166. — Portion de la coupe précédente plus fortement grossie.
Fig. 167. — Coupe au-dessus du nœud cotylédonaire au stade A.
Fig. 168. — Nœud cotylédonaire de la plantule E.
Fig. 169. — Partie centrale de la coupe précédente plus fortement grossie.
Fig. 170. — Insertion des faisceaux de la feuille 1.
Fig. 171 à 174. — Cotylédons.
Fig. 175. — Sommet végétatif de la plantule E.

EXPLICATION DE LA PLANCHE XV.

FICARIA RANUNCULOIDES (suite).

Fig. 176 et 177. — Cotylédons.
Fig. 178. — Cotylédon du radis.
Fig. 179 et 180. — Deux coupes successives dans le sommet végétatif de la plantule F.
Fig. 181. — Base des pétioles cotylédonaires de l'embryon C.
Fig. 182. — Base des pétioles cotylédonaires de la plantule F (ouverture de la cavité d'invagination).
Fig. 183. — Base des pétioles cotylédonaires de la plantule G (ouverture de la cavité d'invagination).
Fig. 184. — Coupe un peu en dessous de la précédente (la gaine cotylédonaire est un peu distendue et déchirée en face de la feuille 1).
Fig. 185. — Faisceau médian cotylédonaire à la base de la gaine dans l'embryon C : différenciation libérienne.
Fig. 186. — Le même dans la plantule E.
Fig. 187. — Milieu du tube cotylédonaire dans la plantule E.

EXPLICATION DE LA PLANCHE XVI.

FICARIA RANUNCULOIDES (suite).

Fig. 188. — Portion de la coupe 187 plus fortement grossie.
Fig. 189. — Milieu du tube cotylédonaire d'une plantule F dépourvue de faisceaux marginaux.

Fig. 190. — Milieu du tube cotylédonaire d'une plantule F pourvue de faisceaux marginaux.
Fig. 191. — Portion de la coupe précédente plus fortement grossie.
Fig. 192, 195 et 196. — Coupes successives dans le haut du tube cotylédonaire de la plantule F.
Fig. 193. — Coupe vers le haut du tube dans l'embryon D.
Fig. 194. — Portion de la coupe précédente plus fortement grossie.
Fig. 197. — Sommet du limbe bilobé dans la plantule F.
Fig. 198. — Milieu du limbe cotylédonaire de l'embryon A.
Fig. 199. — Milieu du limbe cotylédonaire de la plantule F.
Fig. 200. — Épiderme externe du cotylédon.
Fig. 201. — Faisceau médian de la feuille 1 dans le sommet végétatif de F.
Fig. 202. — Le même dans la plantule G.
Fig. 203. — Feuille 1.

EXPLICATION DE LA PLANCHE XVII.

FICARIA RANUNCULOIDES (fin).

Fig. 204. — Racine principale de F.
Fig. 205. — Partie centrale de la coupe précédente plus fortement grossie.
Fig. 206. — Insertion d'une radicelle.
Fig. 207. — Portion de la coupe précédente vue sous un plus fort grossissement.
Fig. 208. — Insertion d'un bourgeon sur l'hypocotyle en dessous du nœud cotylédonaire, et insertion d'une racine adventive sur ce bourgeon (plantule F).
Fig. 209. — Partie centrale d'une racine adventive tubérisée.
Fig. 210. — Portion périphérique de la même.
Fig. 211. — Insertion d'une racine adventive un peu au-dessous du bourgeon adventif dans la plantule G.

CALTHA PALUSTRIS (page 49).

Fig. 212. — Une plantule de *Caltha palustris*.
Fig. 213. — Cotylédon.
Fig. 214. — Coupe dans le bourgeon terminal.

Fig. 214bis. — Coupe un peu au-dessus de la précédente : ouverture de la gaine de la feuille 1.
Fig. 215. — Feuille 1.

TROLLIUS EUROPÆUS (page 50).

Fig. 216. — Plantule de *Trollius europaeus*.
Fig. 217. — Coupe transversale de la gaine au niveau des cotylédons.
Fig. 218. — Milieu de l'hypocotyle de l'embryon.
Fig. 219. — Un cotylédon de l'embryon dans la graine.

EXPLICATION DE LA PLANCHE XVIII.

TROLLIUS EUROPÆUS (fin).

Fig. 220. — Cotylédon développé.
Fig. 221. — Coupe dans le bourgeon terminal.
Fig. 222. — Feuille 1.

ERANTHIS HIEMALIS (page 51).

Fig. 223. — Plantule d'*Eranthis hiemalis*, la deuxième année.
Fig. 224. — Plantule au printemps de la troisième année.
Fig. 225. — Embryon.
Fig. 226. — Coupe dans le suspenseur de l'embryon.
Fig. 227. — Coupe vers le milieu de l'embryon.
Fig. 228. — Racine principale de la plantule représentée par la figure 223.
Fig. 229. — Coupe à la base du tubercule.
Fig. 230. — Portion périphérique de la coupe précédente.
Fig. 231. — Portion centrale.
Fig. 232. — Partie centrale de la coupe précédente plus fortement grossie.
Fig. 233. — Coupe vers le milieu du tubercule.
Fig. 234. — Coupe un peu au-dessous du nœud cotylédonaire (sommet du tubercule).

EXPLICATION DE LA PLANCHE XIX.

ERANTHIS HIEMALIS (suite).

Fig. 235. — Portion de la coupe 234 plus fortement grossie.
Fig. 236. — Coupe dans le nœud cotylédonaire.
Fig. 237. — Coupe dans le bourgeon terminal.
Fig. 238, 239, 240, 241, 243, 245. — Coupes successives vers la base du tube cotylédonaire.
Fig. 242. — Portion de la coupe 241.
Fig. 244. — Portion périphérique de la coupe 243.
Fig. 246. — Coupe longitudinale schématique dans la base du tube cotylédonaire et le sommet végétatif.
Fig. 247 et 249. — Coupes successives vers le sommet des pétioles concrescents.
Fig. 248. — Portion de la coupe 247 fortement grossie.
Fig. 250, *a*, *b*, *c*, *d*. — Coupes successives vers le sommet des pétioles concrescents d'un autre individu.
Fig. 251. — Cotylédon.
Fig. 252. — Coupe dans le bourgeon terminal de la plantule représentée par la figure 224.

EXPLICATION DE LA PLANCHE XX.

ERANTHIS HIEMALIS (fin).

Fig. 253. — Feuille 3 (première feuille végétative).

HELLEBORUS FOETIDUS (page 55).

Fig. 254. — Plantule d'*Helleborus fœtidus*.
Fig. 255. — Coupe vers le milieu de l'hypocotyle de l'embryon.
Fig. 256. — Coupe dans le nœud cotylédonaire de l'embryon.
Fig. 257. — Coupe dans l'embryon au milieu des cotylédons.
Fig. 258. — Cotylédon développé.

Fig. 259. — Épiderme interne vers le sommet du cotylédon.
Fig. 260. — Épiderme externe du cotylédon.
Fig. 261. — Épiderme externe vers le sommet du cotylédon.
Fig. 262. — Sommet de la feuille 1, face interne.

GARIDELLA NIGELLASTRUM (page 56).

Fig. 263. — Cotylédon de *Garidella nigellastrum*.

EXPLICATION DE LA PLANCHE XXI.

GARIDELLA NIGELLASTRUM (fin).

Fig. 264. — Plantule.
Fig. 265. — Feuille 1.

GENRE *NIGELLA* (page 56).

Fig. 266. — Plantule de *Nigella arvensis*.
Fig. 267. — » » » *orientalis*.
Fig. 268. — Cotylédon de » *arvensis*.

AQUILEGIA VULGARIS (page 57).

Fig. 269. — Plantule d'*Aquilegia vulgaris*.
Fig. 270. — Milieu de l'hypocotyle de la même (portion périphérique).
Fig. 271. — Cotylédon.
Fig. 272. — Feuille 1

ISOPYRUM FUMARIOIDES (page 58).

Fig. 273. — Plantule d'*Isopyrum fumarioides*.
Fig. 274. — Coupe transversale de la graine au niveau des cotylédons.
Fig. 275. — Milieu de l'hypocotyle de l'embryon.
Fig. 276. — Cotylédon.
Fig. 277. — Feuille 1.

DELPHINIUM NUDICAULE (page 59).

Fig. 278. — Plantule de *Delphinium nudicaule*.

EXPLICATION DE LA PLANCHE XXII.

DELPHINIUM NUDICAULE (fin).

Fig. 279. — Coupe transversale vers le milieu de l'hypocotyle de l'embryon de *Delphinium nudicaule.*

Fig. 280 et 281. — Coupes successives dans l'embryon un peu au-dessus du méristème primitif de la tige principale.

Fig. 282. — Milieu de l'hypocotyle d'une plantule.

Fig. 283. — Coupe dans le nœud cotylédonaire d'une plantule.

Fig. 284 et 285. — Coupes successives au-dessus du nœud cotylédonaire.

Fig. 286. — Portion fortement grossie d'une coupe au-dessus du nœud cotylédonaire.

Fig. 287. — Coupe à la base du tube cotylédonaire.

Fig. 288. — Portion centrale de la coupe précédente plus fortement grossie.

Fig. 289. — Coupe vers le sommet du tube cotylédonaire.

Fig. 290. — Portion centrale de la coupe précédente plus fortement grossie.

Fig. 291 et 292. — Coupes successives vers la base du limbe.

GENRE *ACONITUM* (page 62).

Fig. 293. — Plantule d'*Aconitum uncinatum.*

EXPLICATION DE LA PLANCHE XXIII.

GENRE *ACONITUM* (fin).

Fig. 294. — Plantule d'*Aconitum volubile.*

Fig. 295. — » » *stoerkianum.*

Fig. 296. — Cotylédon d'*Aconitum uncinatum.*

Fig. 297. — Bord de la face interne de la feuille 1 d'*Aconitum uncinatum.*

Fig. 298. — Feuille 1 du même.

CIMICIFUGA RACEMOSA (page 63).

Fig. 299. — Plantule de *Cimicifuga racemosa*.
Fig. 300. — Bord d'un cotylédon du même.
Fig. 301. — Cotylédon.

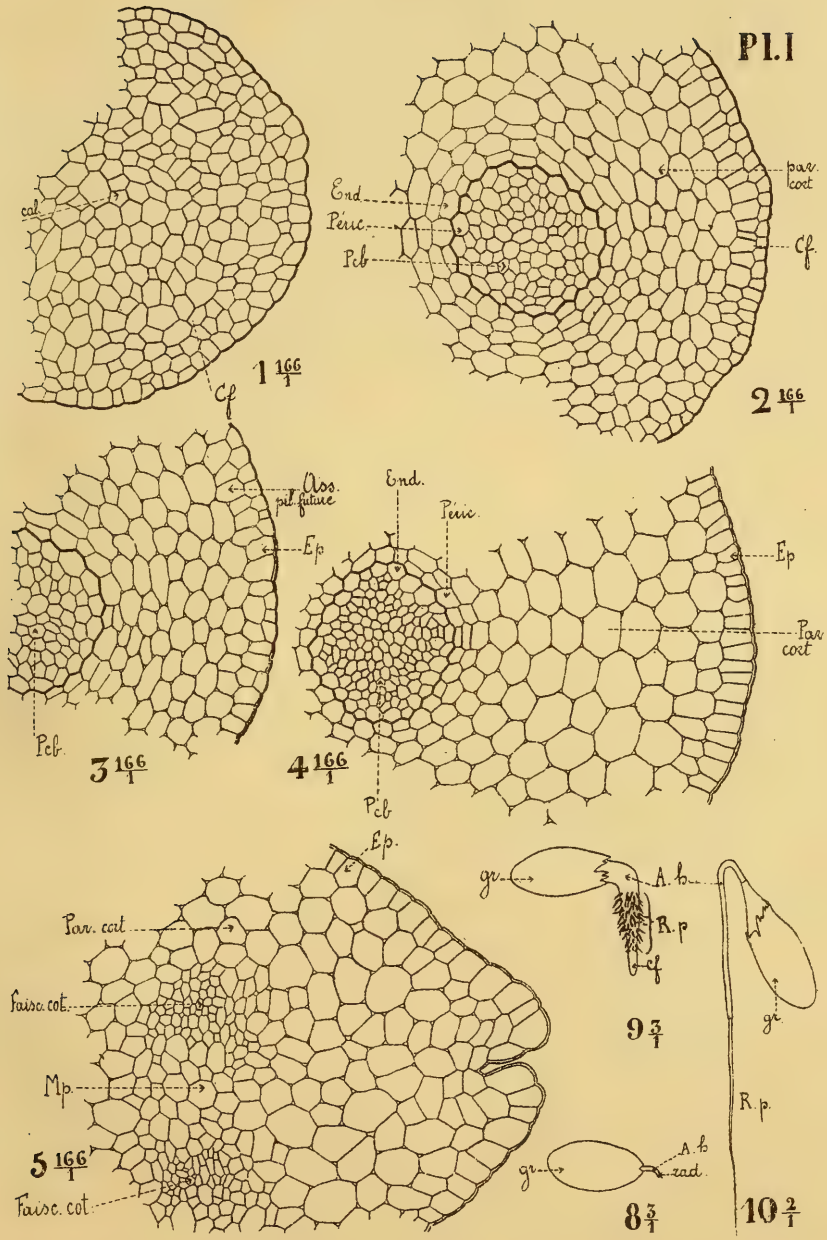
PÆONIA OFFICINALIS (page 64).

Fig. 302. — Plantule de *Pæonia officinalis*.
Fig. 303. — Coupe longitudinale de l'embryon.
Fig. 304. — Milieu de l'hypocotyle de l'embryon.
Fig. 305. — Un cotylédon de l'embryon dans la graine.

EXPLICATION DE LA PLANCHE XXIV.

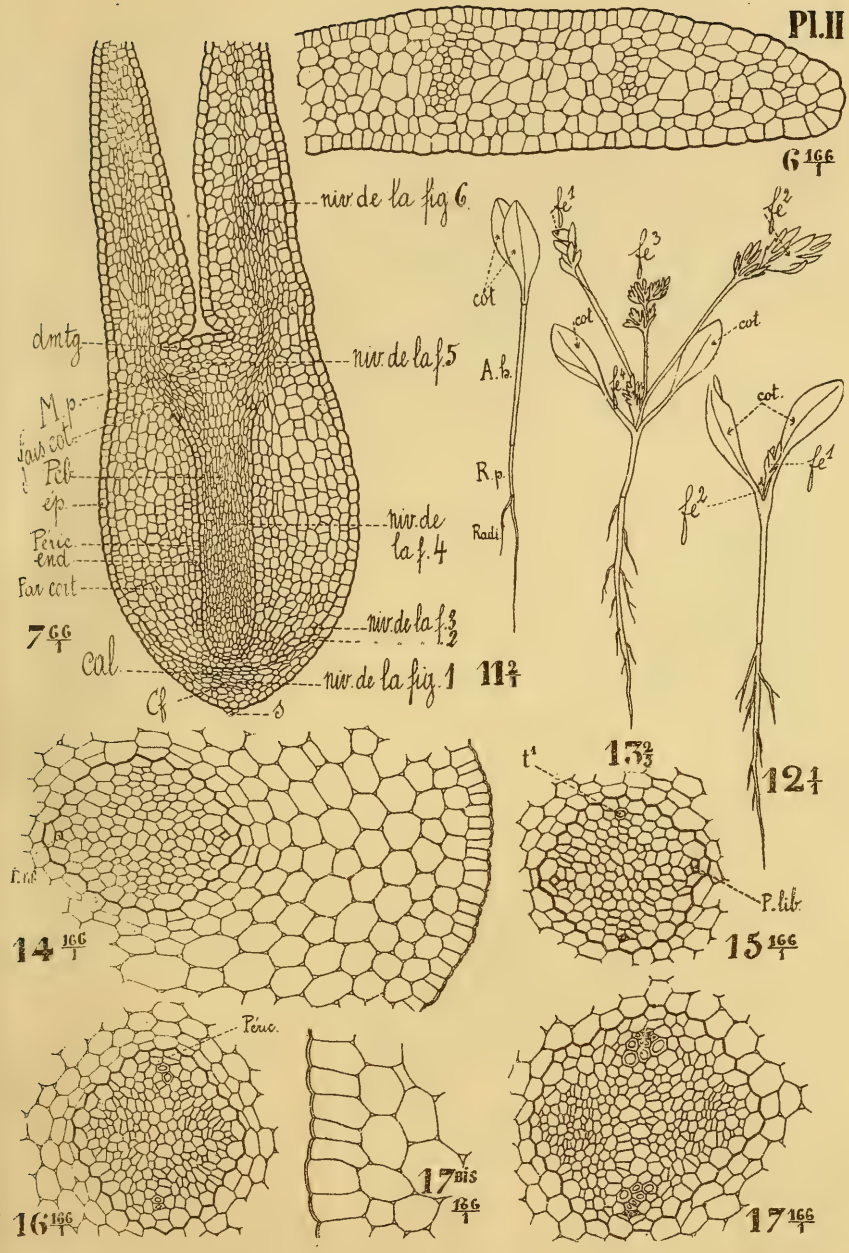
PÆONIA OFFICINALIS (fin).

Fig. 306. — Nœud cotylédonaire de l'embryon.
Fig. 307. — Milieu de l'hypocotyle de la plantule représentée par la figure 302, partie centrale.
Fig. 308. — Milieu de l'hypocotyle de la même plantule, portion périphérique.
Fig. 309. — Collet interne, partie centrale.
Fig. 310. — » » » périphérique.
Fig. 311. — Cotylédon.
Fig. 312. — Coupe transversale du cotylédon.



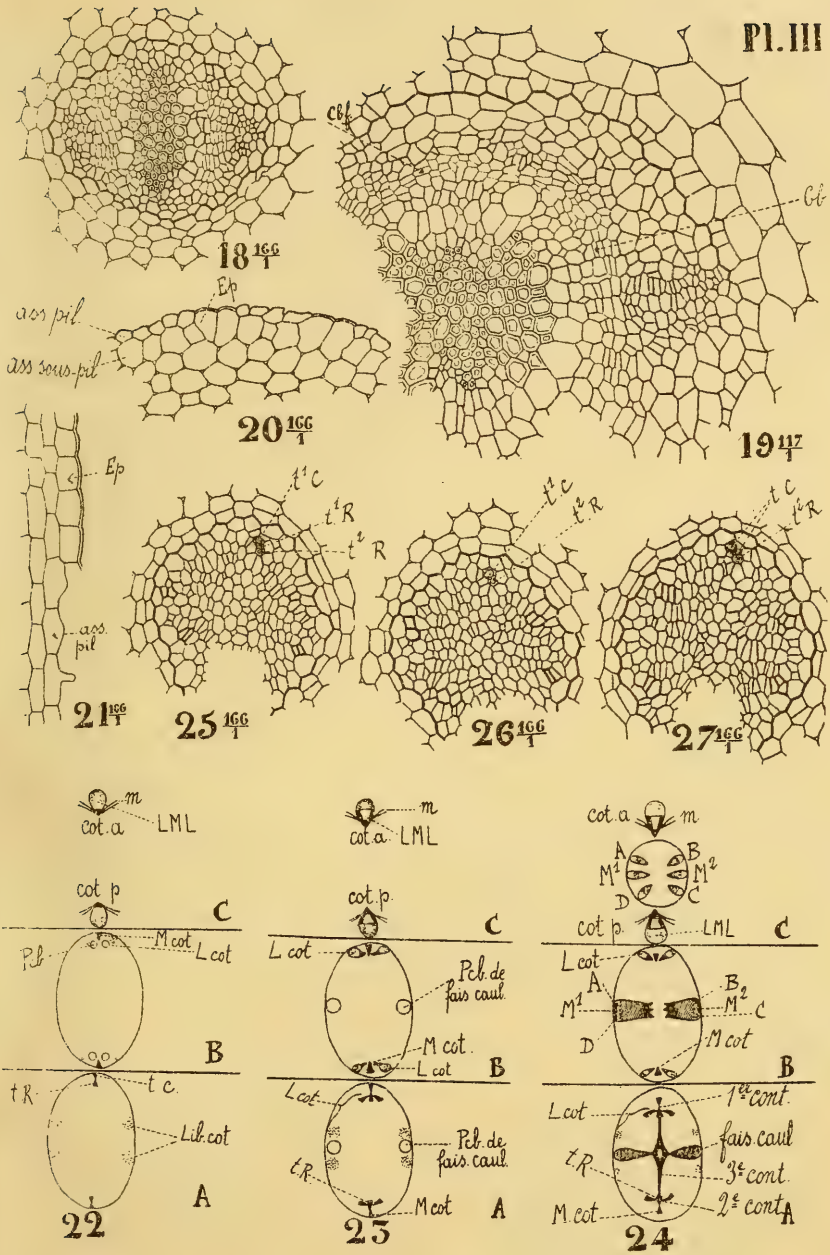
NIGELLA DAMASCENA. Embryon dans la graine mûre (suite).
Caractères extérieurs des plantules

R. Sterckx, ad. nat. del.



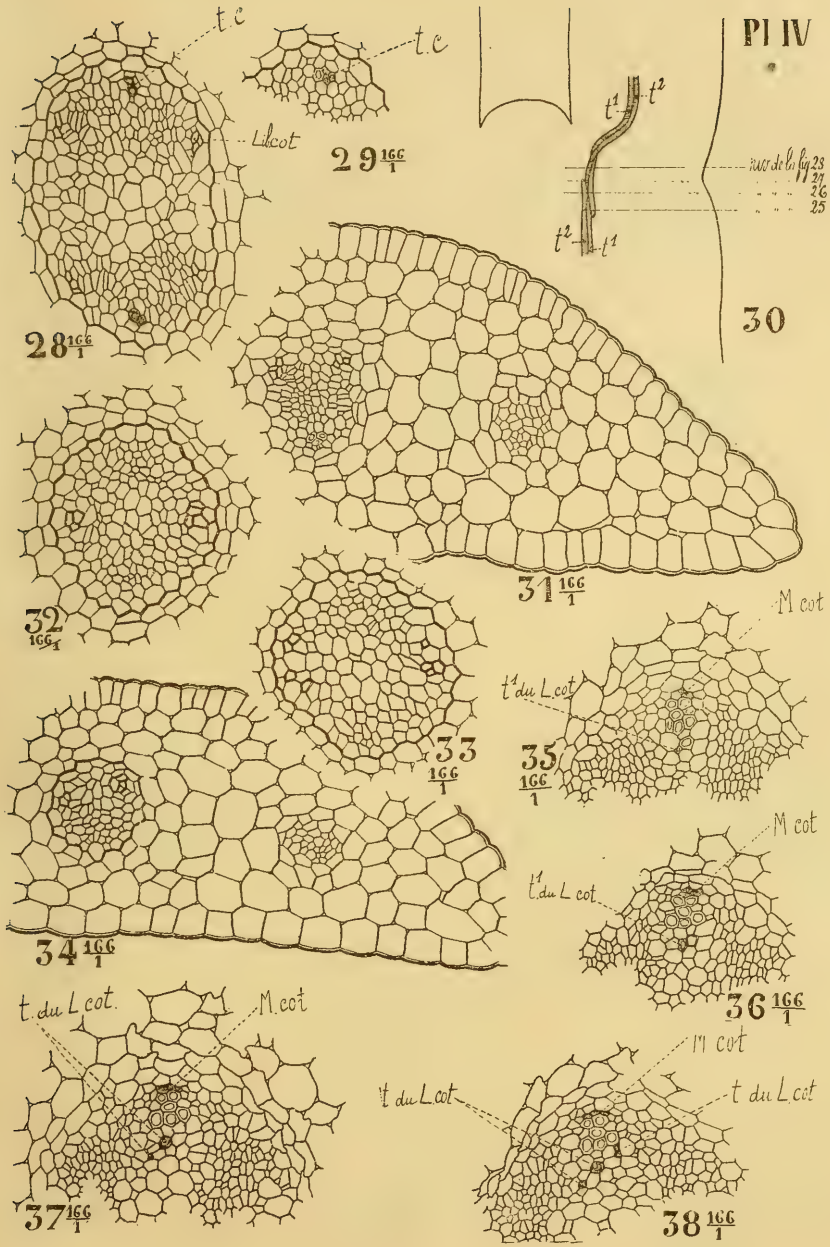
NIGELLA DAMASCENA. Embryon dans la graine mûre (suite).
Caractères extérieurs des plantules (suite).
Structure au milieu de l'hypocotyle.

R. Sterckx, ad. nat. del.



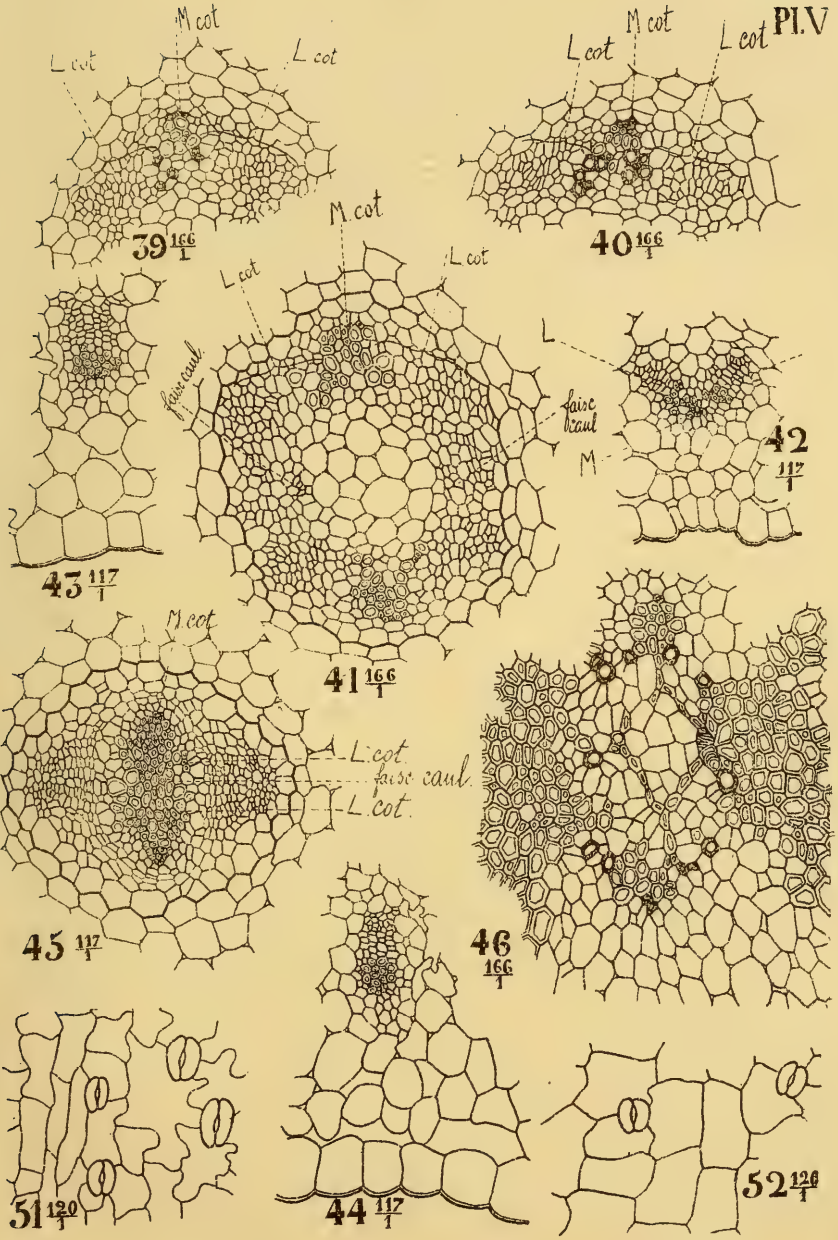
NIGELLA DAMASCENA. 1° milieu de l'hypocotyle (suite),
2° limite inférieure de l'hypocotyle,
3° région d'insertion des cotylédons.

R. Sterckx, ad. nat. del.



NIGELLA DAMASCENA. Région d'insertion des cotylédons (suite).

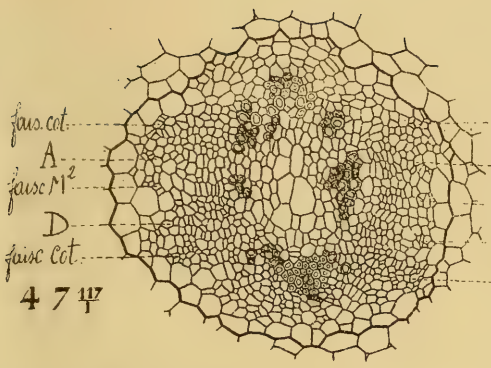
R. Sterckx; ad. nat. del.

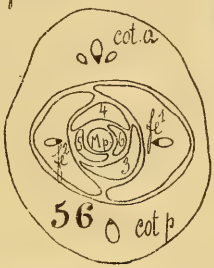


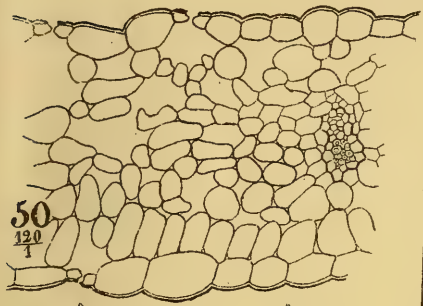
NIGELLA DAMASCENA. Région d'insertion des cotylédons (suite).

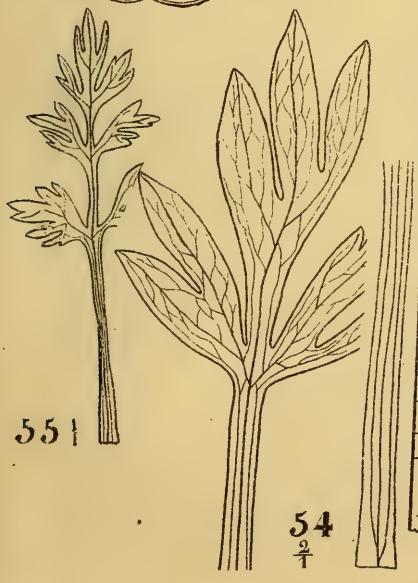
Structure des cotylédons.

R. Sterckx, ad. nat. del.







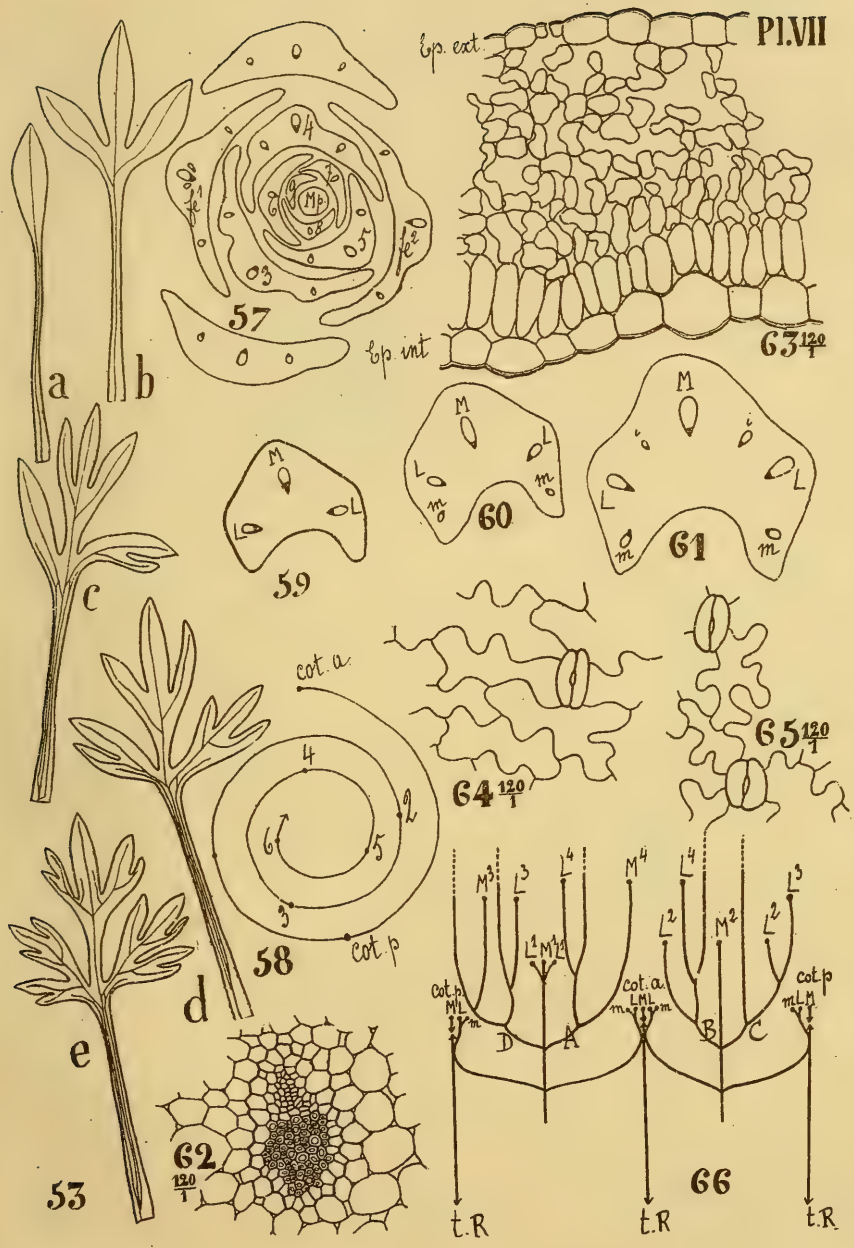


	D'après Gérard. Passage du bois de l'orientation centripète à l'orientation centrifuge	D'après l'auteur de cette mémoire. Contact du bois centrifuge avec le bois centripète.
Moitié supérieure du mont hypocotylé	cot.a cot.p.	L L M cot.a. M L L cot.p.
Moitié inférieure du mont hypocotylé	t.R	L L M.cot
En dessous du mont hypocotylé	t.R	L.cot M cot L cot t.R
Sommet de l'hypocotyle	t.R Lib	t.R Lib

48

NIGELLA DAMASCENA. Région d'insertion des cotylédons (fin). Structure des cotylédons (fin). Premières feuilles

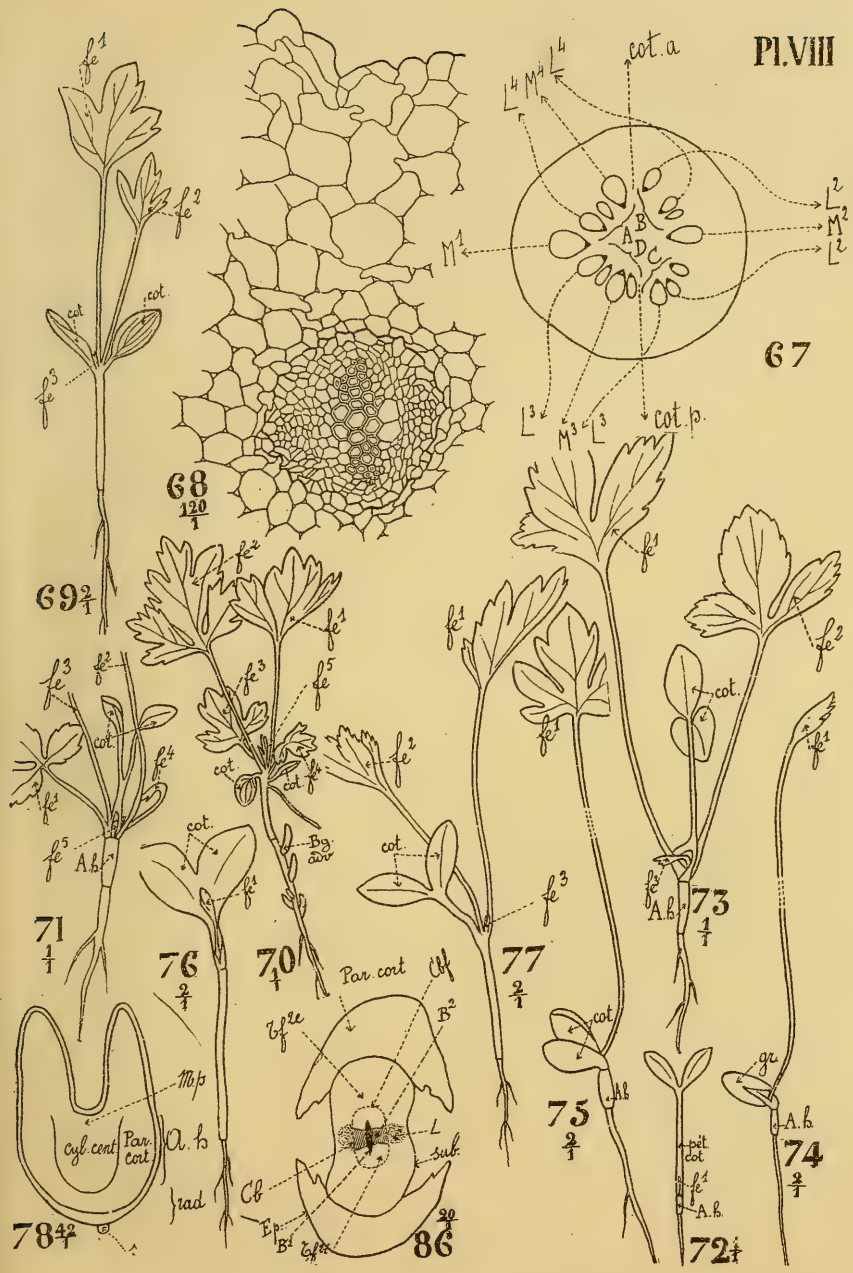
R. Sterckx, ad. nat. del.



NIGELLA DAMASCENA. Premières feuilles (fin).

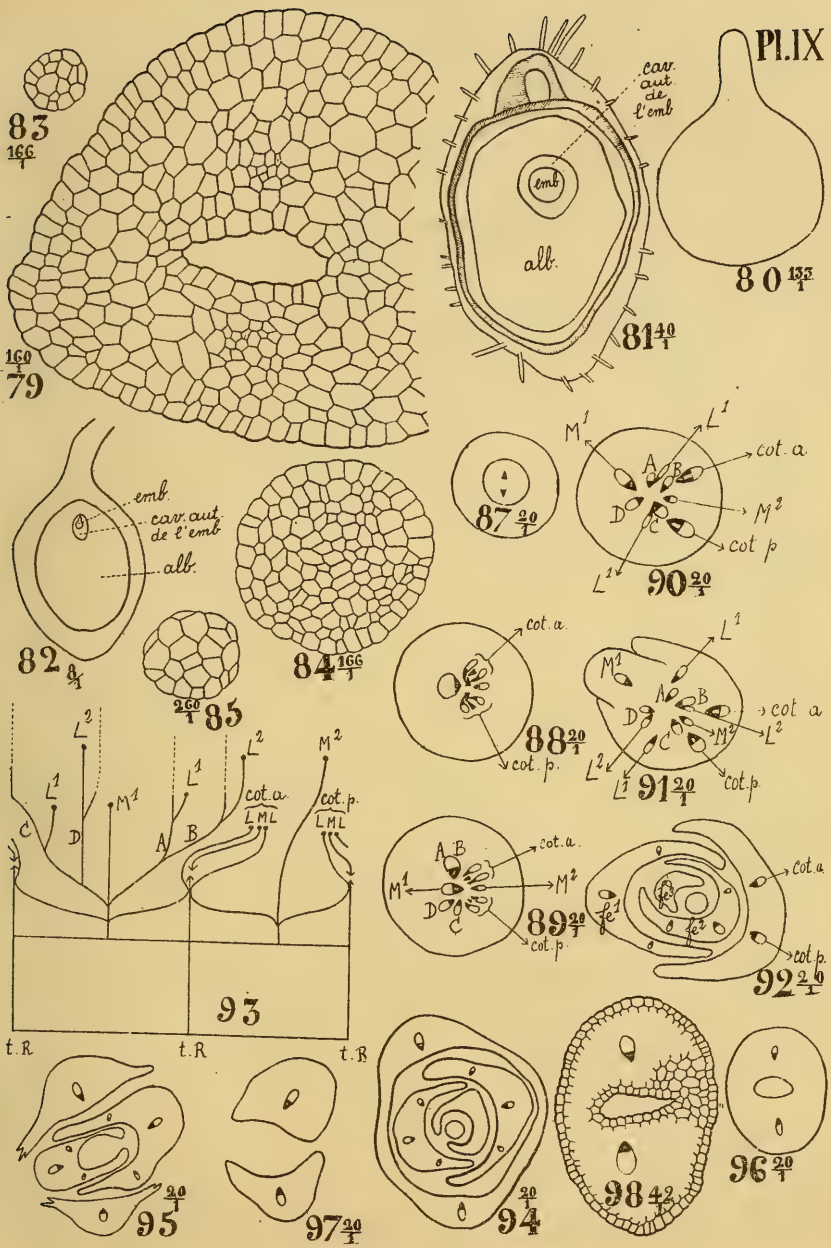
. Tige principale.

R. Sterckx. ad. nat. del.



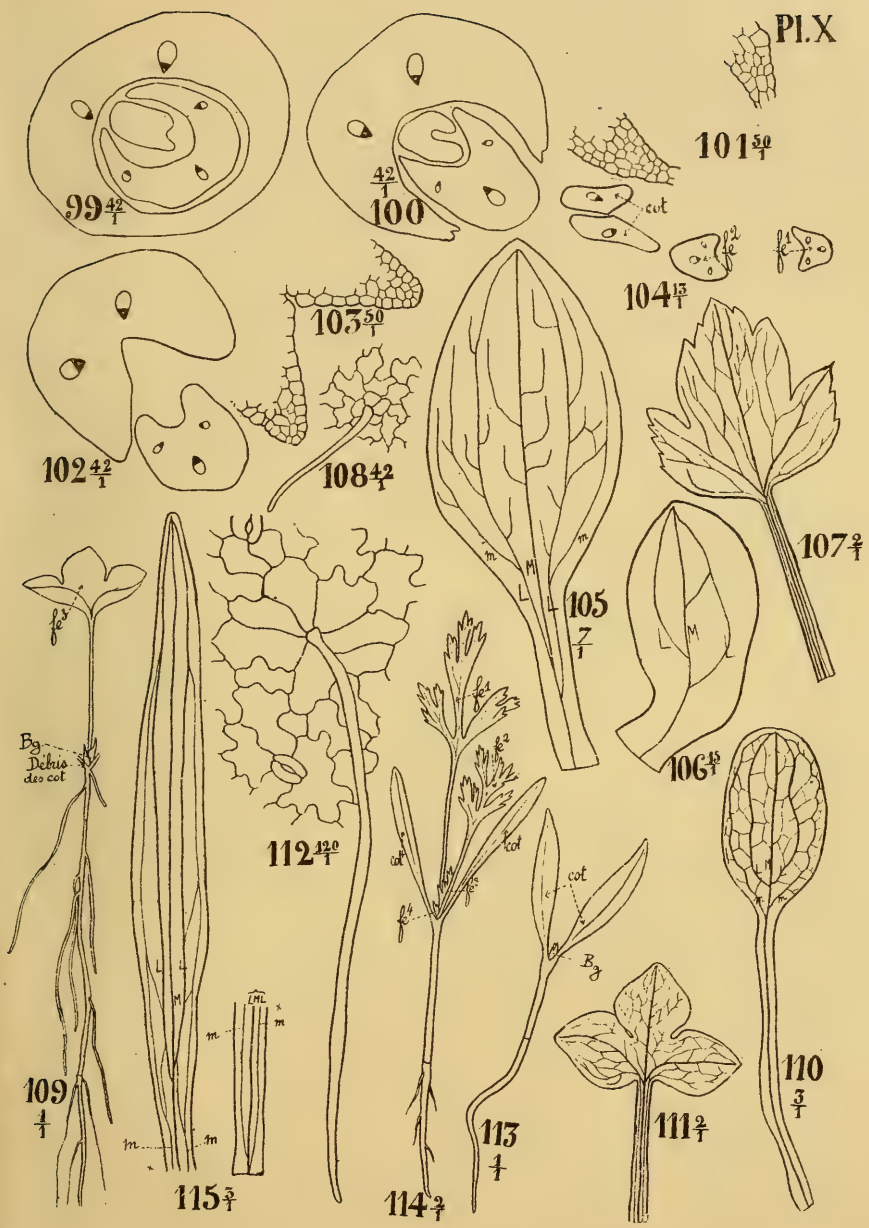
NIGELLA DAMASCENA. Tige principale (fin). Racine principale.
Genre ANEMONE. Plantules, embryon, hypocotyle.

R. Sterckx, ad. nat. del.



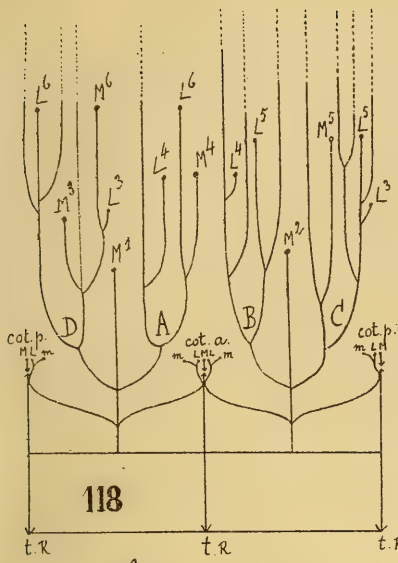
Genre ANEMONE. (suite). Embryon. hypocotyle, cotylédons.

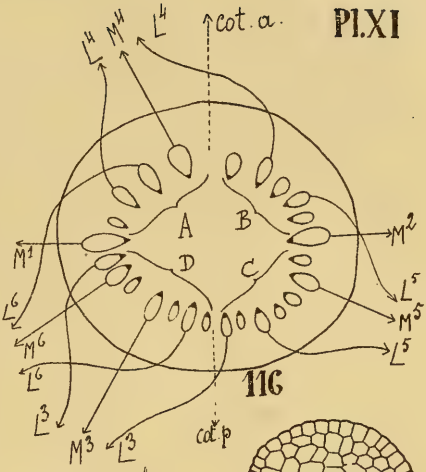
R. Sterckx, ad. nat. del.

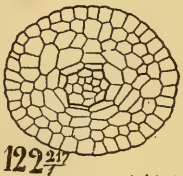


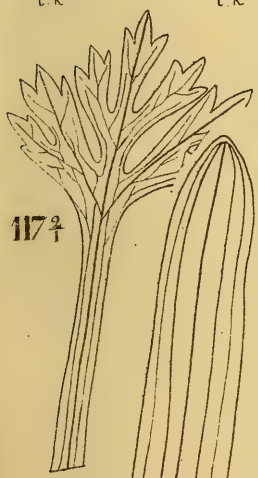
Genre ANEMONE. (fin) Cotylédons et feuille 1.
HEPATICA TRILOBA. Plantule, cotylédon, feuille 1.
Genre ADONIS. Plantules et cotylédon.

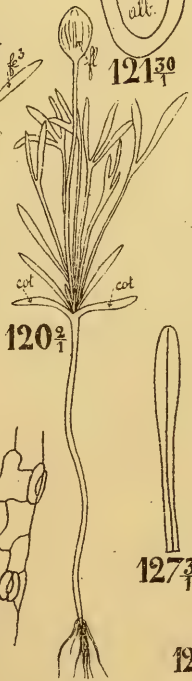
R. Sterckx, ad. nat. del.

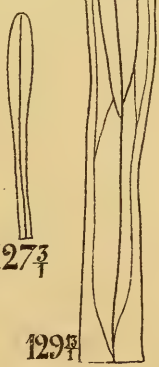


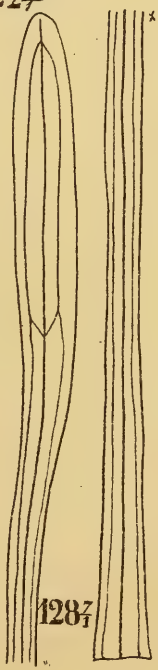






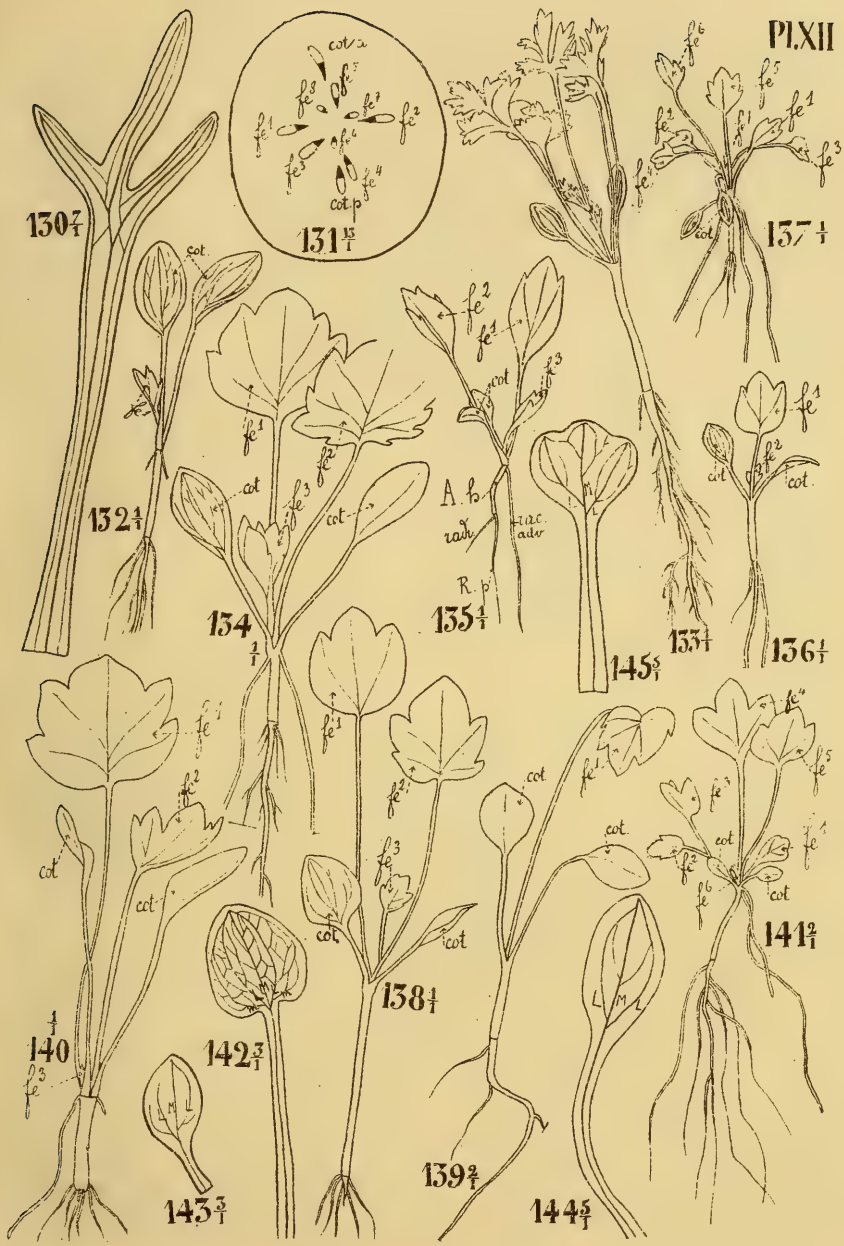






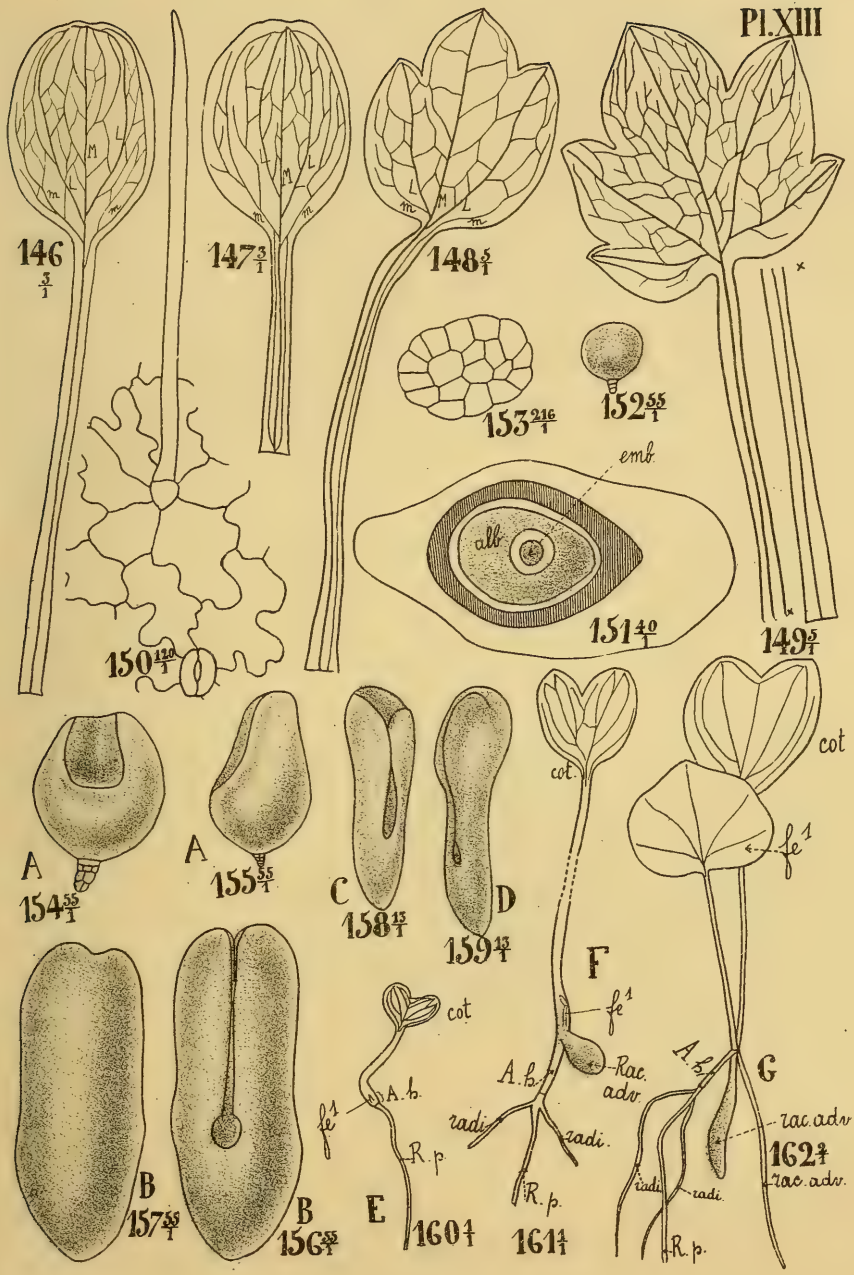
Genre ADONIS. (fin) Feuilles et tige principale.
Genres MYOSURUS et CERATOCEPHALUS.
Plantules, embryon, cotylédons, feuilles.

R. Sterckx, ad. nat. del.



Genres MYOSURUS et CERATOCEPHALUS. (fin)
Feuilles et nœud cotylédonaire.
Genre RANUNCULUS. Plantules et cotylédons, feuille 1.

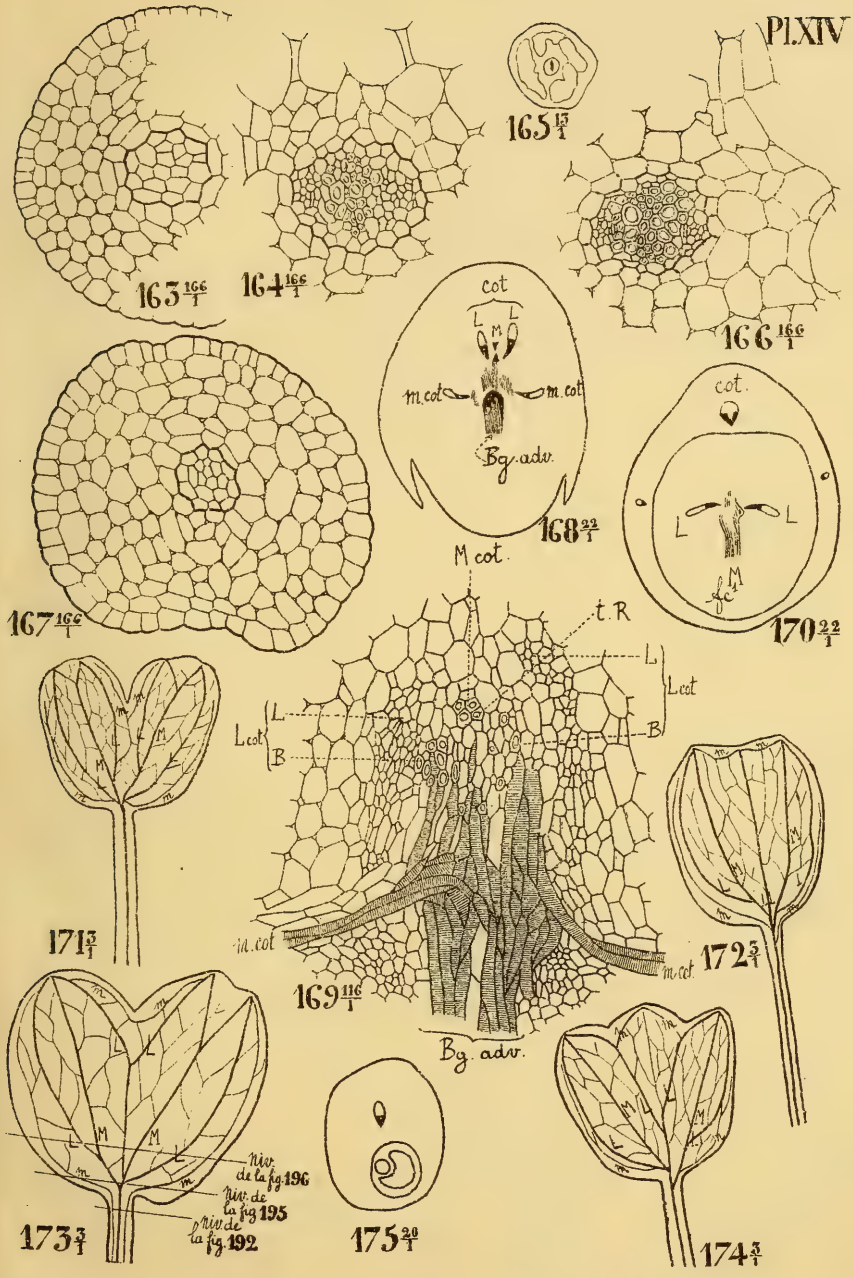
R. Sterckx, ad. nat. del.



Genre RANUNCULUS. (fin). cotylédons et feuille 1.

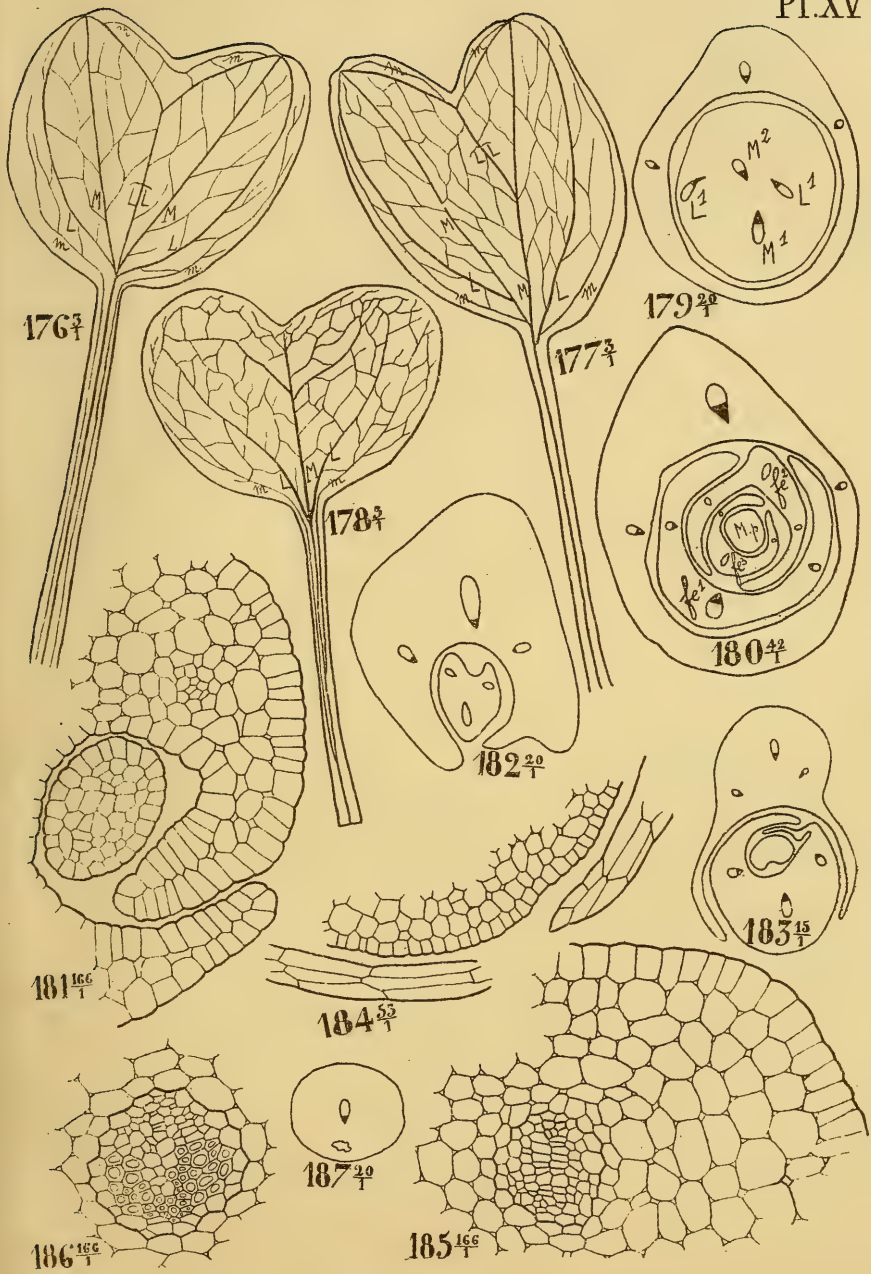
FICARIA RANUNCULOÏDES. embryons et plantules.

R. Sterckx, ad. nat. del.



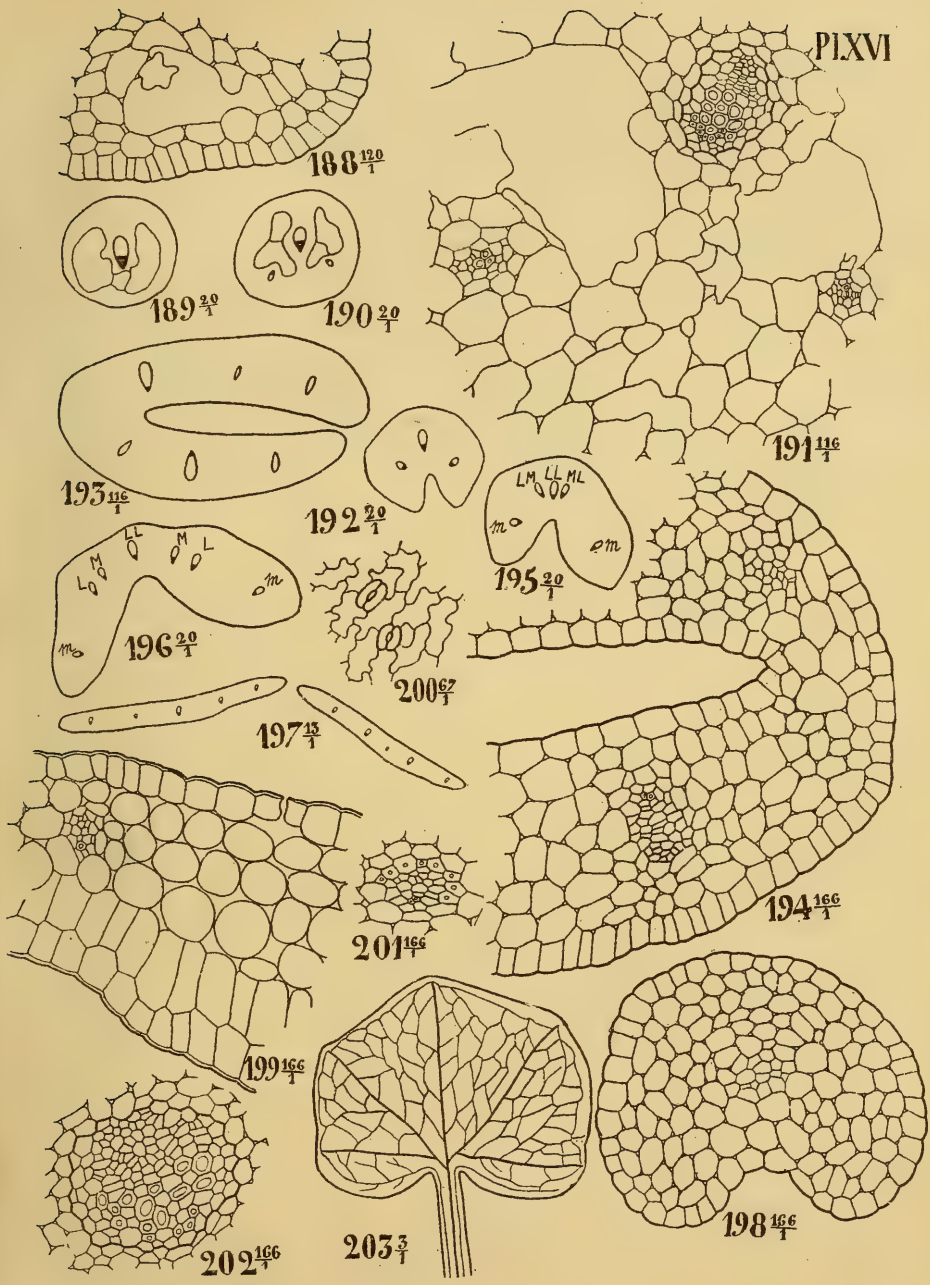
FICARIA RANUNCULOÏDES. (suite) Hypocotyle et cotylédons.

R. Sterckx, ad. nat. del.



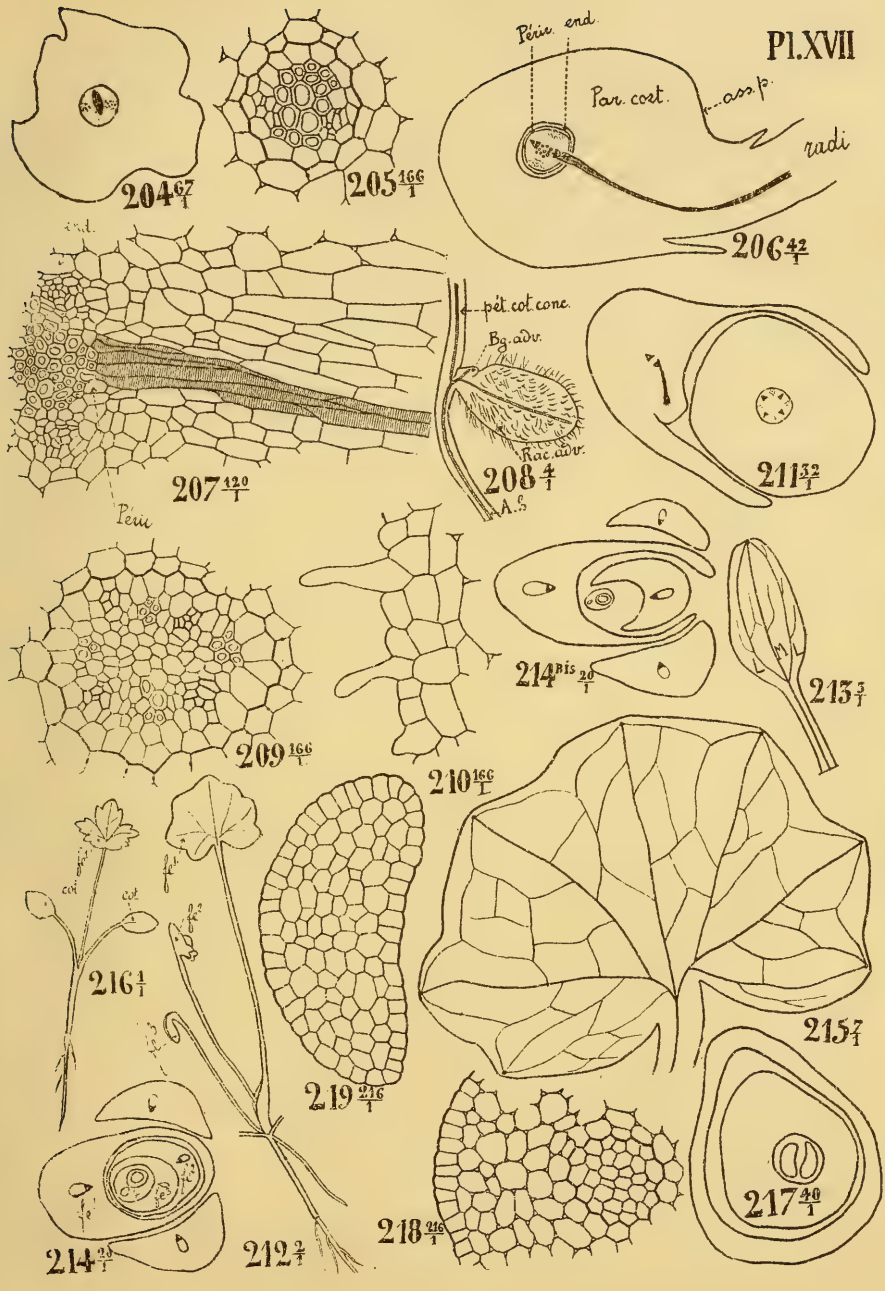
FICARIA RANUNCULOÏDES. (suite) cotylédons

R. Sterckx, ad. nat. del.



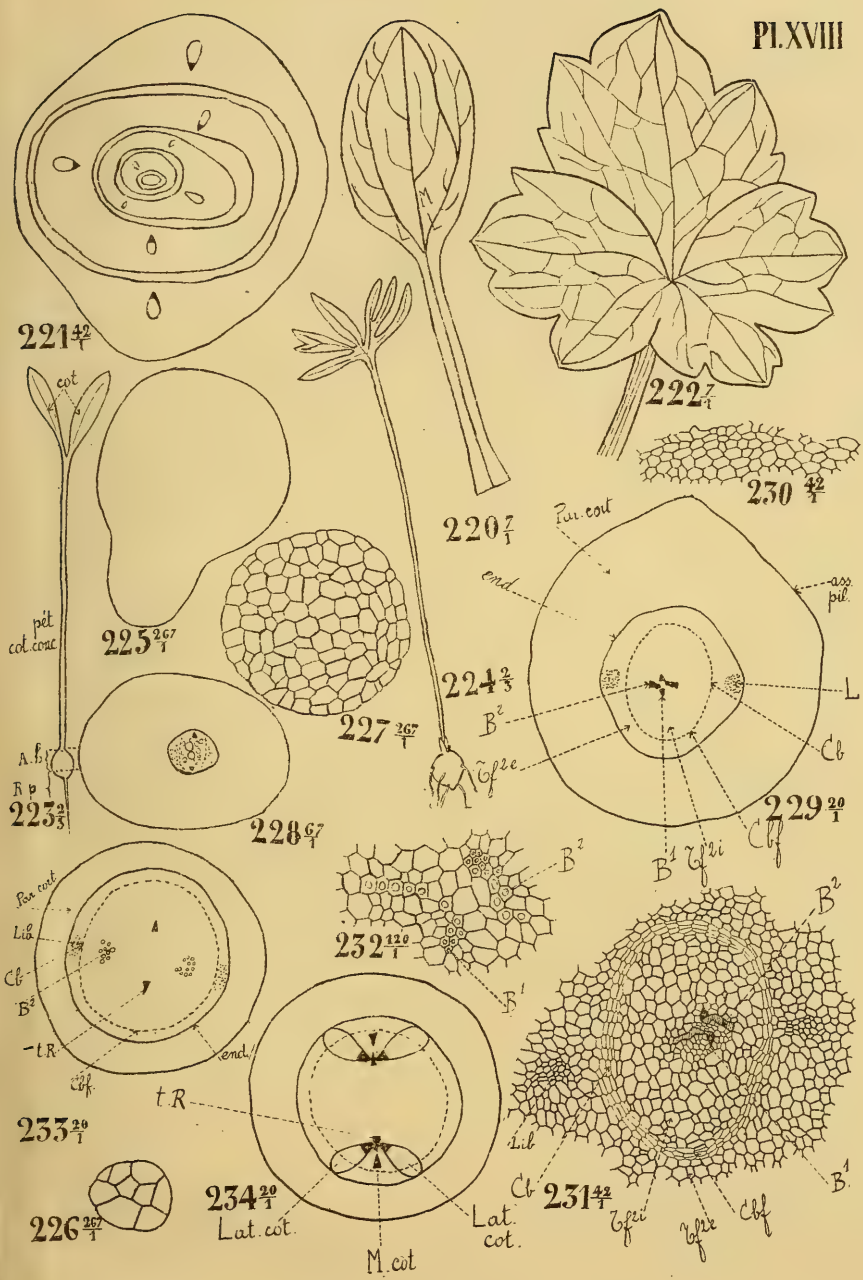
FICARIA RANUNCULOÏDES. (suite) cotylédons et feuille 1.

R. Sterckx, ad. nat. del.



FICARIA RANUNCULOÏDES. (fin). Racines.
CALTHA PALUSTRIS. Plantule, cotylédon feuille 1.
TROLLIUS EUROPŒUS. Plantule et embryon.

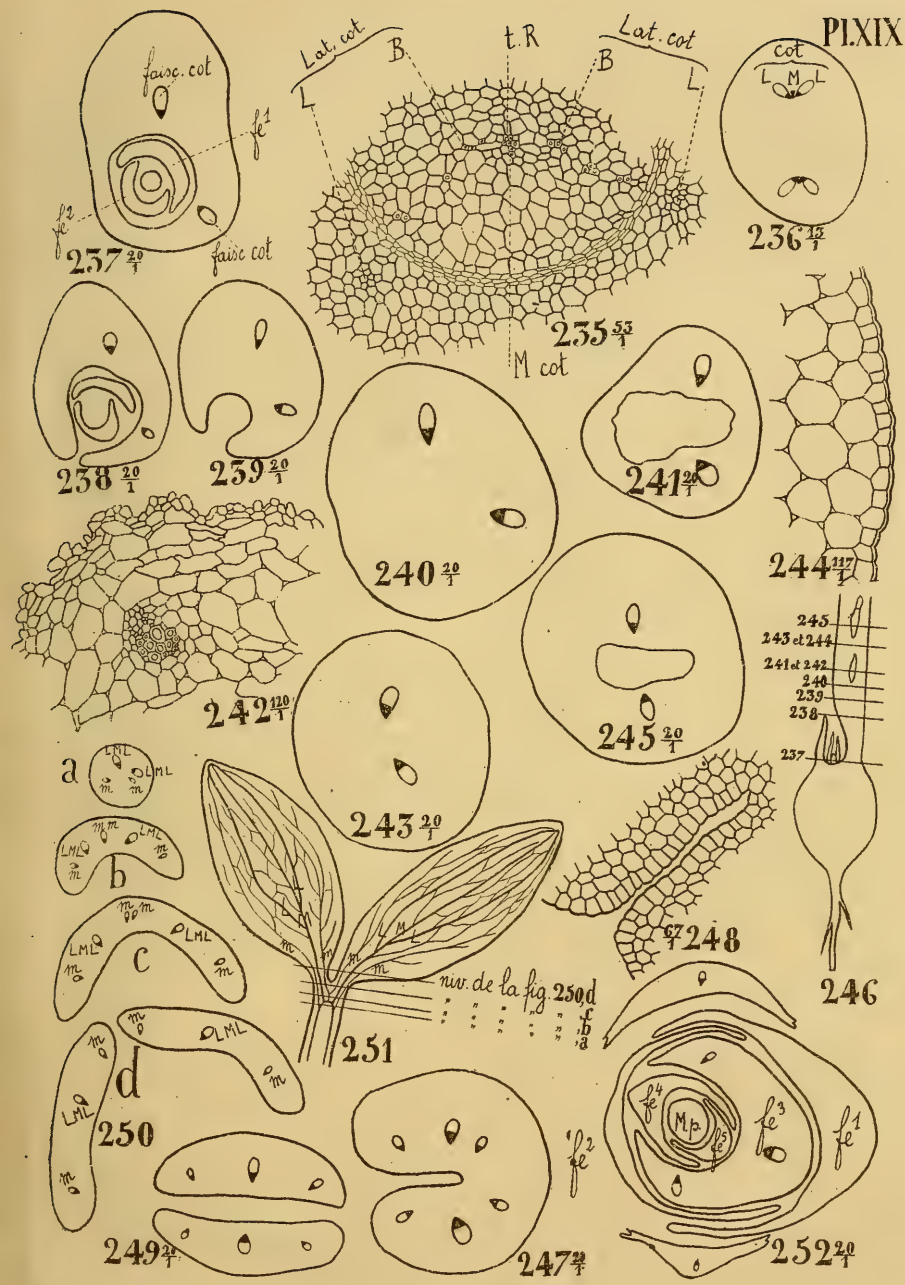
R. Blanchard ad nat. del.



TROLLIUS EUROPŒUS. (fin). cotylédons et feuille 1.

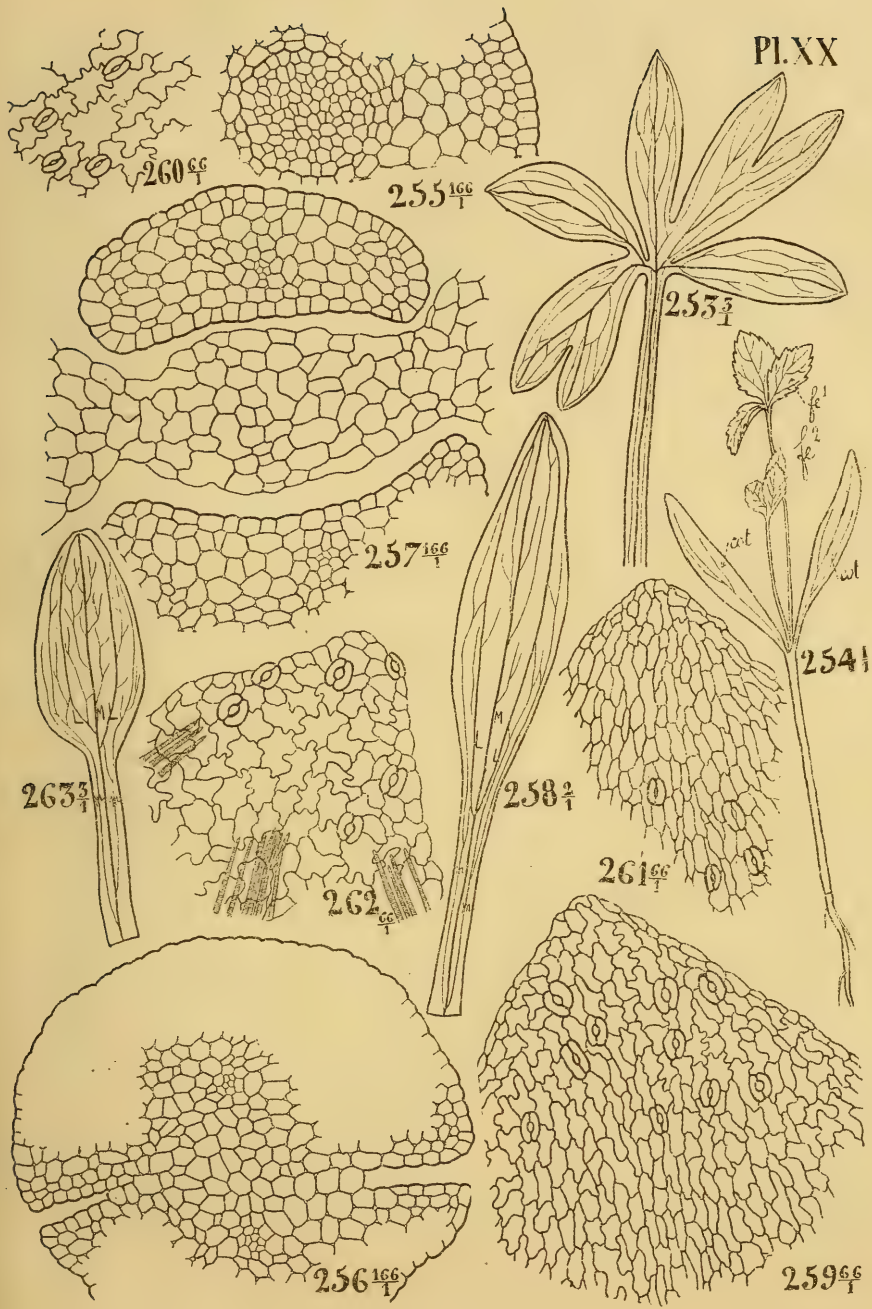
ERANTHIS HIEMALIS. Plantules, embryon, racine principale, tubercule.

R. Sterckx, ad. nat. del.



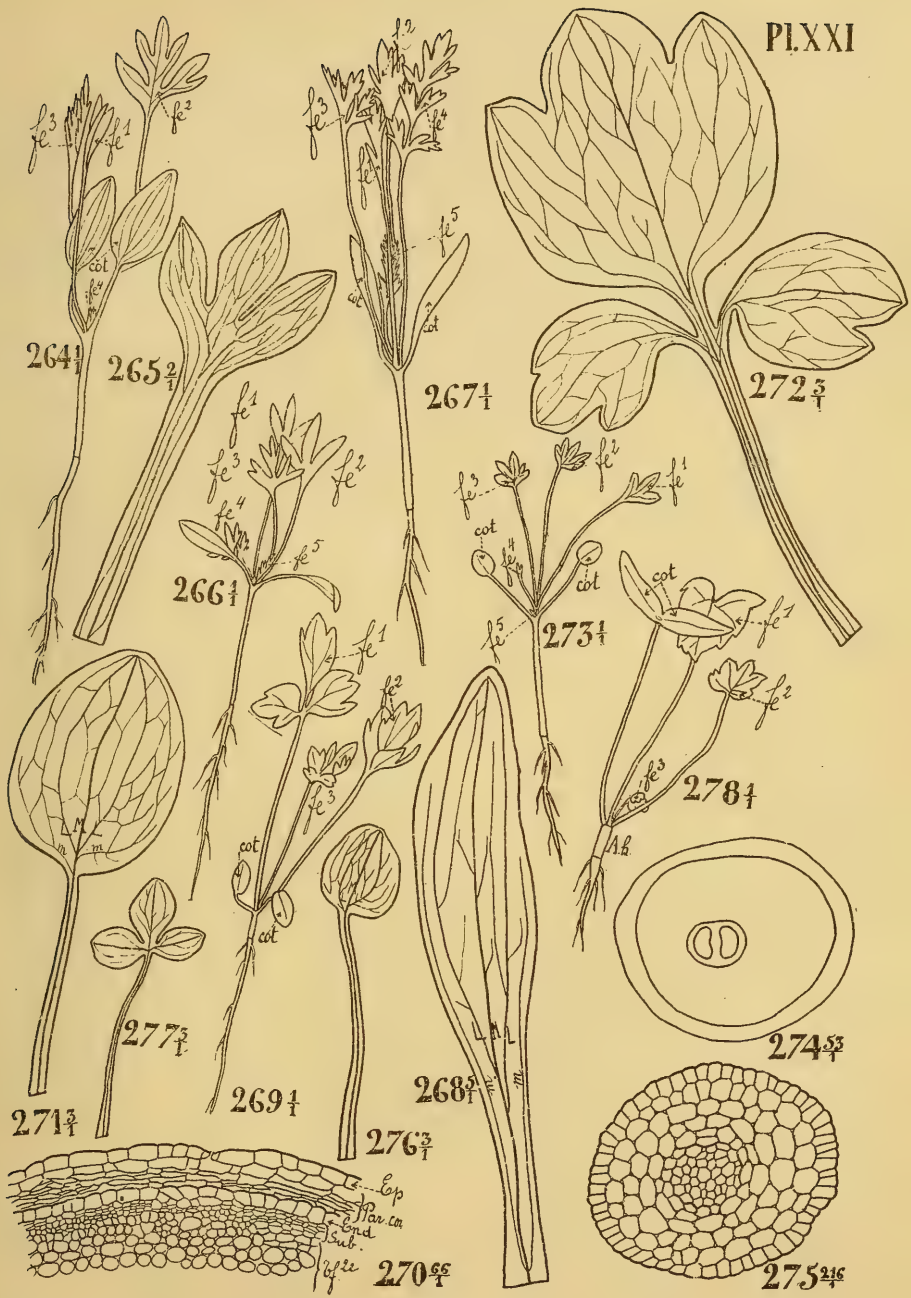
ERANTHIS HIEMALIS. (suite) tubercule et cotylédons.

R. Sterckx, ad. nat. del.



ERANTHIS HIEMALIS. (fin) feuille 3
HELLEBORUS FŒTIDUS. Plantule, embryon, cotylédon, feuille 1.
GARIDELLA NIGELLASTRUM. cotylédon.

R. Sterckx, ad. nat. del.



GARIDELLA NIGELLASTRUM. (suite) Plantule et feuille 1.

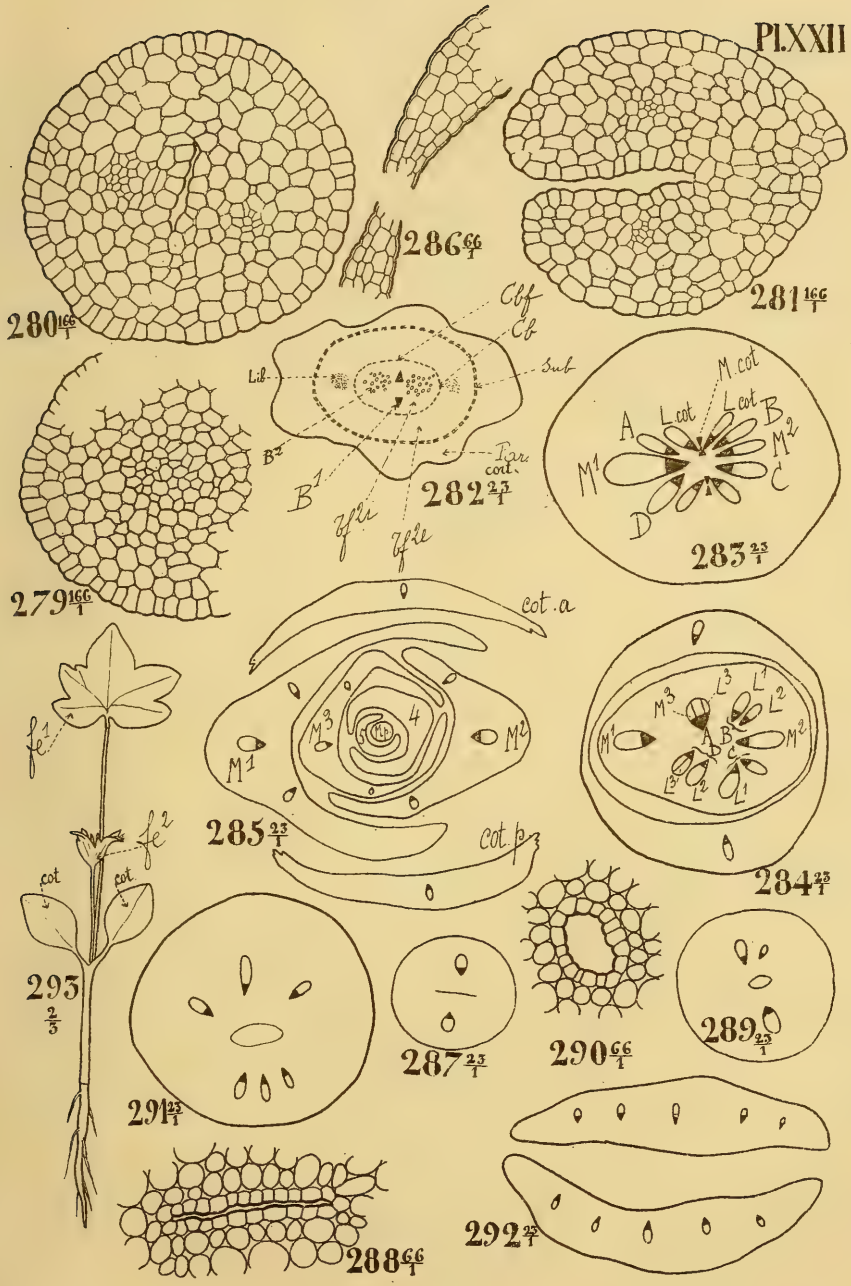
genre NIGELLA. Plantules et cotylédon.

AQUILEGIA VULGARIS. Plantule, hypocotyle, cotylédon, feuille 1.

ISOPYRUM FUMARIOÏDES. Plantule, Embryon, hypocotyle, cotylédon, feu

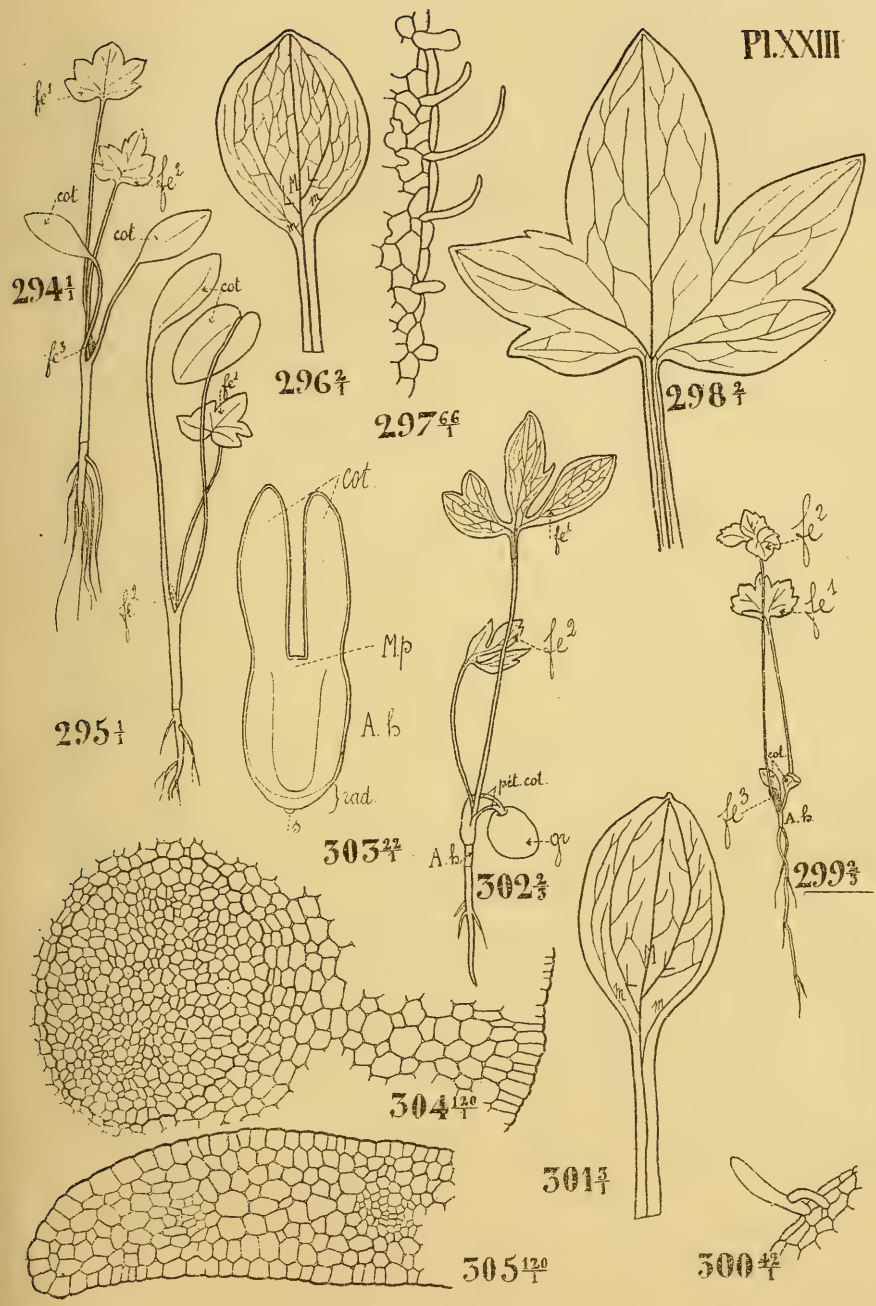
DELPHINIUM NUDICAULE. Plantule.

R. Sterckx, ad. nat. del.



DELPHINIUM NUDICAULE. (fin) Embryon, hypocotyle, cotylédons.
genre AGONITUM. Plantule d'A. UNCINATUM.

R. Sterckx, ad. nat. del.

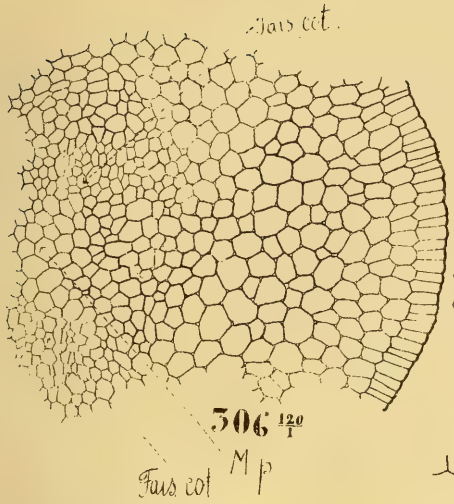


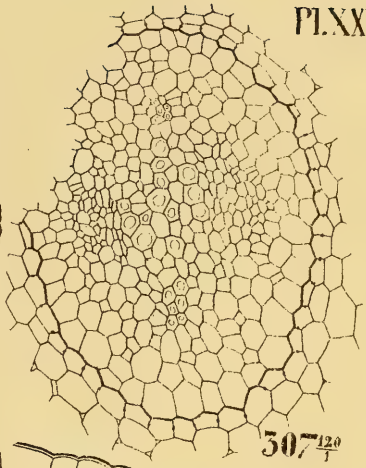
Genre ACONITUM. (fin) Plantule, cotylédon, feuille 1.

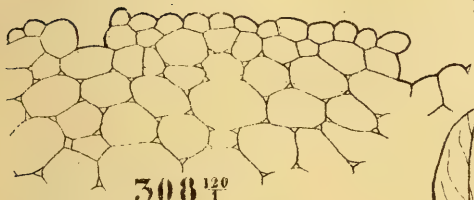
CIMICIFUGA RACEMOSA. Plantule et cotylédon.

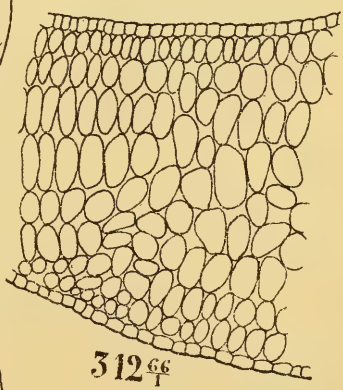
PŒONIA OFFICINALIS. Plantule et Embryon.

R. Sterckx, ad. nat. del.









PŒONIA OFFICINALIS. (fin) Embryon, hypocotyle, cotylédons.

R. Sterckx, ad. nat. del.

TABLE DES MATIÈRES.

Pages.

INTRODUCTION 3

PREMIÈRE PARTIE.

NIGELLA DAMASCENA.

I. — L'EMBRYON DANS LA GRAINE MURE.

Caractères extérieurs 5

Structure. 6

Coupes transversales. 6

Coupe longitudinale 7

II. — LES PLANTULES.

Caractères extérieurs 9

§ 1. *Hypocotyle.*

A. Structure au milieu de l'hypocotyle. 9

B. Structure dans la région inférieure de l'hypocotyle. Rapports de l'hypocotyle avec la racine principale. 10

C. Structure dans la région d'insertion des cotylédons. 10

D. Résumé 14

E. Remarques physiologiques. 15

F. Historique. Discussion Conclusions 16

§ 2. *Cotylédons.*

A. Caractères extérieurs 20

B. Histologie 20

§ 3. *Premières feuilles.*

A. Caractères extérieurs 21

B. Disposition. 21

C. Histologie 22

§ 4. *Tige principale.*

A. Caractères extérieurs 24

B. Structure 24

§ 5. *Racines*. 24

DEUXIÈME PARTIE.

ESPÈCES DIVERSES.

Pages.

I. Genre *Clematis* 25
II. Genre *Atragene* 28
III. Genre *Thalictrum* 30
IV. Genre *Anemone* 32
V. Genre *Hepatica* 36
VI. Genre *Adonis* 37
VII. Genres *Myosurus* et *Ceratocephalus* 38
VIII. Genre *Ranunculus* 40
IX. Genre *Ficaria* 42
X. Genre *Caltha* 49
XI. Genre *Trollius* 50
XII. Genre *Eranthis* 51
XIII. Genre *Helleborus* 55
XIV. Genre *Garidella* 56
XV. Genre *Nigella* 56
XVI. Genre *Aquilegia* 57
XVII. Genre *Isopyrum* 58
XVIII. Genre *Delphinium* 59
XIX. Genre *Aconitum* 62
XX. Genres *Actaea* et *Cimicifuga* 63
XXI. Genre *Paeonia* 64

TROISIÈME PARTIE.

RÉSUMÉ, HISTORIQUE ET CONCLUSIONS.

I. Embryon 66
II. Hypocotyle. Collet superficiel. Collet interne 68
III. Germination 78
IV. Cotylédons 82
V. Premières feuilles 86
VI. Tige principale 89
VII. Racines 90

ABRÉVIATIONS 93

EXPLICATION DES PLANCHES 94

QUELQUES PROPRIÉTÉS NOUVELLES

DES

RACINES DES FONCTIONS DE BESSEL

DE PREMIÈRE ESPÈCE

PAR

L. GEGENBAUER,

PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE VIENNE.

QUELQUES PROPRIÉTÉS NOUVELLES

DES

RACINES DES FONCTIONS DE BESSEL

DE PREMIÈRE ESPÈCE.

I. Si dans la relation bien connue

$$\int_0^1 J^m(z\alpha)\,\alpha^{m+1}(1-\alpha^2)^n\,d\alpha = \frac{2^n\,\Pi(n)}{z^n}\,J^{m+n+1}(z)$$

$$(m > -1, \quad n > -1)$$

on prend pour z la plus petite racine positive z_{m+n+1} de la fonction $J^{m+n+1}(z)$, on obtient

$$\int_0^1 J^m(\alpha z_{m+n+1})\,\alpha^{m+1}(1-\alpha^2)^n\,d\alpha = 0.$$

De la dernière formule, on déduit que J_z^m s'annule au moins pour une valeur positive de l'argument, inférieure à z_{m+n+1}; ainsi :

La plus petite racine positive d'une fonction de Bessel de première espèce dont l'indice est supérieure à -1, *est d'autant plus voisine de zéro, que l'indice est plus petit.*

Pour les indices qui sont des multiples impairs et positifs de $\frac{1}{2}$, cette propriété est un simple corollaire du théorème établi par M. Rudski dans sa « Note sur la situation des racines des

équations transcendantes $J_{n+\frac{1}{2}}(x) = 0$, où J désigne une fonction de Bessel, $n = 0, 1, 2...$ » (*); à savoir que « Les racines positives de la fonction $J_{n+\frac{1}{2}}(z)$ se trouvent situées, une à une, dans les $(n + 2i)^{\text{ièmes}}$ quadrants, $(i = 1, 2, ...)$ ».

Comme autre vérification de l'énoncé précédent, on trouve que les plus petites racines positives des fonctions $J^0(z)$, $J^1(z)$, $J^2(z)$, $J^3(z)$, $J^4(z)$ et $J^5(z)$ sont

2.405..., 3.832..., 5.135..., 6.379..., 7.586..., 8.780...

II. On peut étudier la manière suivant laquelle la plus petite racine augmente avec l'indice, au moyen de l'équation

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} J^m(q\cos\varphi)\, J^n(y\sin\varphi)\cos^{m+1}\varphi\sin^{n+1}\varphi\, d\varphi = \frac{q^m y^n J^{m+n+1}\left(\sqrt{q^2+y^2}\right)}{\left(\sqrt{q^2+y^2}\right)^{m+n+1}},\quad (m>-1,\ n>-1),$$

qui, pour $\sqrt{q^2+y^2} = z_{m+n+1}$, devient

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} q^{-m} J^m(q\cos\varphi)\, y^{-n} J^n(y\sin\varphi)\cos^{m+1}\varphi\sin^{n+1}\varphi\, d\varphi = 0. \quad (1)$$

D'après cette formule, le produit

$$q^{-m} J^m(q\cos\varphi) \times y^{-n} J^n(y\sin\varphi)$$

s'annule au moins pour *une* valeur de φ comprise entre 0 et $\frac{\pi}{2}$. Si l'on prend pour y la plus petite racine positive z_n de $J^n(z)$, le second facteur est différent de zéro dans l'intervalle considéré, et ainsi $z^{-m} J^m(z)$ s'annule au moins pour *une* valeur de z inférieure à

$$\left|\sqrt{z_{m+n+1}^2 - z_n^2}\right|.$$

(*) *Mémoires de la Société royale des sciences de Liége*, 2e sér., t. XVIII.

On a donc ce théorème :

La plus petite racine de la fonction de Bessel $J^{m+n+1}(z)$, *pour* $m > -1$, $n > -1$, *est supérieure à la valeur absolue de la racine carrée de la somme des carrés des plus petites racines positives de* $J^m(z)$ *et* $J^n(z)$.

En combinant ce théorème avec celui de M. Rudski, on voit que *si* m *et* $\rho < m$ *sont deux nombres entiers positifs, la plus petite racine positive de* $J^m(z)$ *est supérieure à*

$$\frac{\pi}{2}\left|\sqrt{m^2 - 2m\rho + 2\rho^2}\right|.$$

Si dans la formule (1) on fait $y = q$, on obtient de même ces théorèmes :

La plus petite racine positive de la fonction de Bessel $J^{m+n+1}(z)$, *pour* $m \gtrless n > -1$, *est supérieure au produit de* $\sqrt{2}$ *et de la plus petite racine positive de* $J^n(z)$.

La plus petite racine positive d'une fonction de Bessel de première espèce à indice pair est supérieure au produit de $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ *et de l'indice.*

III. Les résultats précédents sont relatifs aux limites inférieures des plus petites racines des fonctions de Bessel ; on peut y ajouter des théorèmes concernant des limites supérieures.

La relation de C. Neumann et Schläfli

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} J^{2m}(2x\cos\varphi)\,d\varphi = \frac{\pi}{2}\left(J^m(x)\right)^2$$

a lieu, comme on peut le voir facilement, pour toute valeur de $m > -1$ (et non pas seulement pour les valeurs entières, ainsi qu'on l'a établi jusqu'à présent). Pour $x = z_m$ on obtient

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} J^{2m}(2z_m\cos\varphi)\,d\varphi = 0,$$

ce qui permet d'énoncer ces deux théorèmes :

La plus petite racine positive d'une fonction de Bessel de pre-

mière espèce est inférieure au double de la plus petite racine de la fonction de Bessel dont l'indice est de moitié moindre.

La plus petite racine de la fonction $J^m(x)$ *à indice positif impair, est inférieure à*

$$\left\{\left[\frac{m}{2}\right] + 2\right\}\pi.$$

Si l'on suppose que m est un nombre entier positif, la formule de Schläfli

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} J^{2m+1}(2x\cos\varphi)\cos\varphi d\varphi = \frac{\pi}{2} J^m(x) J^{m+1}(x)$$

conduit à la relation

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} J^{2m+1}(2z_m\cos\varphi)\cos\varphi d\varphi = 0$$

puis à cette propriété :

La plus petite racine positive d'une fonction de Bessel, $J^m(z)$, *à indice entier positif, est inférieure au double de la plus petite racine positive de* $J^{\frac{m}{2}}(z)$.

IV. Nous établirons encore un théorème relatif à un intervalle positif d'étendue déterminée, qui comprend toujours au moins une racine positive de $J^m(x)$. D'après le théorème d'addition des fonctions de Bessel, donné dans notre mémoire : *Ueber die Bessel'schen Functionen* (*), on a

$$\left.\begin{aligned}&(\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\cos\varphi)^{-\frac{\nu}{2}} J^\nu\left(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\cos\varphi}\right)\\ &= 2^\nu \Pi(\nu - 1)\sum_{\rho=0}^{\infty}(\rho + \nu)(\alpha\beta)^{-\nu} J^{\rho+\nu}(\alpha) J^{\rho+\nu}(\beta) C_\rho^\nu(\cos\varphi),\end{aligned}\right\}$$

($\nu \geqq 0$), où $C_n^\nu(\alpha_1)$ est le coefficient de α_1^n, dans le développement de $(1 - 2\alpha_1\alpha + \alpha_1^2)^{-\nu}$ suivant les ascendentes puissances de α_1.

(*) *Sitzungberichte der k. Akademie d. Wiss. in Wien* (math.-naturw. Classe), Bd 70, 2. Abth.

On déduit de cette formule

$$\int_0^{\pi} (\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\cos\varphi)^{-\frac{\nu}{2}} J^{\nu}\left(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\cos\varphi}\right)\sin^{2\nu}\varphi d\varphi$$

$$= \frac{2^{2\nu}\,\Pi(\nu)\left[\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)\right]^2}{\Pi(2\nu)}(\alpha\beta)^{-\nu} J^{\nu}(\alpha) J^{\nu}(\beta),$$

et pour $\beta = z_{\nu}$,

$$\int_0^{\pi} (\alpha^2 + z_{\nu}^2 - 2\alpha z_{\nu}\cos\varphi)^{-\frac{\nu}{2}} J^{\nu}\left(\sqrt{\alpha^2 + z_{\nu}^2 - 2\alpha z_{\nu}\cos\varphi}\right)\sin^{2\nu}\varphi d\varphi = 0.$$

Il en résulte que la fonction $z^{-\nu}J^{\nu}(z)$ s'annule au moins pour une valeur de z comprise entre $\alpha - z_{\nu}$ et $\alpha + z_{\nu}$ Donc : *Dans tout intervalle positif, dont l'étendue est le double de la plus petite racine positive d'une fonction de Bessel de première espèce, à indice non négatif, il se trouve au moins une racine de cette même fonction* (*).

En combinant cette propriété avec les précédentes, on voit que : *Une fonction de Bessel de première espèce dont l'indice* m *n'est pas négatif, a au moins une racine dans tout intervalle positif d'étendue* $[(m - \frac{1}{2}) + 3]\pi$.

La fonction $J^7(z)$ *s'annule au moins une fois dans tout intervalle positif d'étendue 20.540 ...*

La fonction $J^9(z)$ *a au moins une racine dans tout intervalle positif d'étendue 25.516...*

(*) Pour $\nu = 0$, cette propriété a été obtenue par M. Maxime Bôcher au moyen du théorème d'addition de C. Neumann pour la fonction $J^0(z)$ (Bôcher, *An elementary proof that Bessel's functions of the zeroth order have an infinite number of real roots.* — Bull. of the American Mathematical Society, vol. V).

SUR

UNE TRANSFORMATION GÉOMÉTRIQUE

PAR

V. RETALI,

PROFESSEUR A MILAN.

SUR

UNE TRANSFORMATION GÉOMÉTRIQUE.

Dans sa dissertation inaugurale (*), le Dr Henkel a étudié deux transformations que l'on peut définir comme il suit : « Étant donnée une courbe C rapportée à deux axes rectangulaires OX, OY, on mène par l'origine une parallèle OP′ à la tangente PT au point P de la courbe, et une parallèle OP″ à la normale en P : trouver les lieux des points d'intersection P′ et P″ de ces droites OP′, OP″ avec la parallèle à OY menée par le point P. » Après avoir établi quelques propriétés générales des transformations indiquées, M. Henkel examine avec détail le cas où C est la parabole

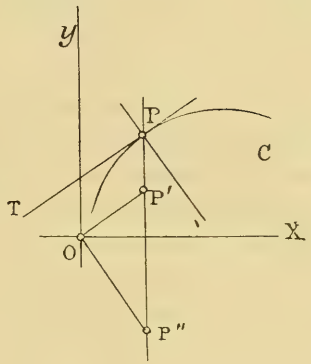


Fig. 1.

$$y^2 = 4m(x - \alpha)$$

(*) *Ueber die aus einer Curve* $y = f(x)$ *abgeleiteten Curven* $y_1 = xf'(x)$ (*Tangentencurve*) *und* $y_1 = -x : f'(x)$ (*Normalcurve*), *mit specieller Anwendung auf die Parabel*, Marburg, 1882. Pour la première de ces transformations, M. Neuberg a proposé la désignation de *transformation pseudo-newtonienne*. Comme publications antérieures se rattachant à la même question, on peut citer : Hochheim, *Die Differentialcurven der Kegelschnitte* (Halle, 1874); Völker, *Ueber eine abgeleitete Curve*, u. s. w. (Inaugural Diss., Marburg, 1880). Je suis redevable de ces renseignements au Dr Henkel, actuellement professeur à Pforta.

et les transformées sont respectivement

$$y^2(x - \alpha) - mx^2 = 0$$

et

$$my^2 + \alpha x^2 - x^3 = 0,$$

dont la première, si $\alpha = m$, devient la *cubique mixte* de M. De Longchamps (*). En voulant étendre aux courbes planes algébriques les transformations imaginées par M. Henkel, dont la première présente une analogie évidente avec la construction donnée par Leibnitz pour les Robervalliennes (**), j'ai été conduit, il y a quelques années, à des résultats assez généraux et en particulier à des générations, que je crois nouvelles, pour la plupart des cubiques ayant reçu un nom et pour quelques quartiques unicursales; mais, distrait par d'autres occupations, j'avais presque oublié ces recherches, lorsque mon attention y a été rappelée récemment par un mémoire de M. Brocard (***). Ce géomètre, prenant son point de départ dans une question posée par M. Petit-Bois dans *Mathesis* (année 1898, p. 215), applique d'abord la première des transformations indiquées au cercle, à la parabole $y^2 = 4mx$, à la courbe en *huit* et au *folium de Descartes;* mais c'est dans les applications qu'il en fait aux

(*) *Journal de Math. spéciales*, année 1886, pp. 245-247. De même si $\alpha = m$, la *Normalcurve* devient la cubique duplicatrice $m(x^2 + y^2) = x^3$ de M. De Longchamps (*ibid.*, pp. 136-138).

(**) Voir Aubry, *De l'usage des figures de l'espace*, etc. (*ibid.*, année 1896, pp. 179-180). La Robervallienne de cercle dont parle M. Aubry n'est pas la cubique d'Agnési, mais on peut obtenir cette cubique en appliquant la construction de Leibnitz à l'ellipse $4x^2 + y^2 = 4a^2$ (voir le n° 6 de cette note). La deuxième transformation de M. Henkel est le produit de la première avec une inversion (spéciale) de Hirst.

(***) *Sur une transformation géométrique* (*transformation pseudo-newtonienne*). Ce mémoire a paru dans les publications de la Société royale des sciences de Liége et a été joint comme supplément à la livraison de mars 1898 de *Mathesis*. La transformation indiquée dans la note de M. Petit-Bois, faisant suite au mémoire de M Brocard, est le deuxième du Dr Henkel, qui a aussi donné la relation entre les aires (*loc. cit.*, § 3).

courbes transcendantes que M. Brocard trouve les résultats plus intéressants et curieux, par exemple les transformées de la logarithmique, de la cycloïde, de la sinusoïde, de la tangentoïde, de la chaînette, de la tractrice sont respectivement la droite, la cissoïde, la *Kohlenspitzencurve*, l'*anguinea* (serpentine), la *Kreuzcurve* et la circonférence.

Quoique ces relations inattendues entre des courbes algébriques et des courbes transcendantes forment le côté le plus intéressant de la transformation, nous croyons qu'il n'est pas inutile de l'approfondir aussi pour les courbes algébriques, et tel est le but de cette note.

Si, dans la transformation que je désigne ci-après par le symbole [Y, O, *s*], nous prenons la droite *s* (*axe*) à l'infini, et pour *premier pôle* Y le point à l'infini de | OY |, nous avons la transformée *pseudo-newtonienne* (X) de M. Brocard; si, en conservant le *deuxième pôle* en O, le premier pôle est le point à l'infini de | OX |, nous avons (Y); si *s* est une droite propre, Y son point à l'infini et O le point à l'infini sur la perpendiculaire, on tombe sur la construction donnée par Leibnitz pour la Robervallienne. Dans les deux premiers numéros, utilisant la théorie des correspondances (*m*, *n*) et quelques résultats obtenus par MM. Schoute (*) et Zeuthen (**), je détermine les caractéristiques pluckériennes de la transformée d'une courbe algébrique n'ayant pas de relations particulières de position avec l'axe et les pôles de la transformation; le numéro suivant contient les modifications que les résultats obtenus subissent lorsque certaines de ces relations ont lieu; les cinq derniers numéros appliquent la transformation aux coniques, aux cubiques et à la quartique de la troisième classe.

(*) *Sur un problème de Steiner.* (BULL. DES SC. MATHÉM., 2e série, t. X, p. 242.)

(**) *Id.*, IBID., t. XI, avril 1887.

1. Dans le plan d'une courbe générale C_m^n, du degré n, de la classe $m = n(n-1)$ et du genre

$$p = \frac{1}{2}(n-1)(n-2),$$

on donne une droite fixe s (fig. 2) et deux points fixes Y et O n'ayant aucune relation particulière de position ni entre eux ni avec C_m^n : si t est la tangente au point variable P de la courbe et P' la projection faite de O sur le rayon | YP |, du point (ts), lorsque P décrit C_m^n, le point P' engendre une certaine courbe que nous nous proposons de déterminer (*). D'abord, comme le lieu cherché et C_m^n se correspondent point à point, ils sont du même genre ; on reconnaît ensuite aisément que le lieu de P' est le produit de deux faisceaux Y et O de rayons en correspondance (m, n) : en effet, à un rayon y, du faisceau Y, coupant C_m^n aux points $P_1, \ldots P_n$, correspondent dans le faisceau O les n rayons qui projettent les points $(t_1 s) \ldots (t_n s)$; à un rayon o du faisceau O correspondent dans le faisceau Y les m rayons qui projettent du point Y les points de contact des tangentes à C_m^n issues du point (os). *Le lieu cherché est donc* (**) *une courbe de l'ordre* n + m *ayant un point* n *uple en* O *et un point* m *uple en* Y ; nous

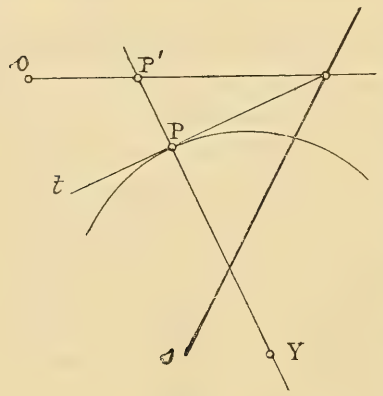


Fig. 2.

(*) En prenant pour s la droite à l'infini, on tombe sur la transformation considérée par M. d'Ocagne dans les six derniers numéros de son mémoire *Sur certaines courbes qu'on peut adjoindre aux courbes planes pour l'étude de leurs propriétés infinitésimales.* (*Journal de Sc. Math.* de M. Gomes Teixeira n° XLVIII, 1888.) L'autre transformation formant l'objet de ce mémoire en est le *produit* avec une inversion (spéciale) de Hirst.

(**) Weyr (Emil), *Beiträge zur Curvenlehre*, § 49. (Wien, 1880.)

le désignerons par C_{3m}^{n+m}, car nous verrons bientôt que sa classe est $3m$.

De la définition de la transformation il s'ensuit que C_{3m}^{n+m} passe par les n points où C_m^n est coupée par l'axe s, et par les m points de contact des tangentes à C_m^n issues de O. Les tangentes au point m- uple y sont les rayons du faisceau Y qui correspondent au rayon (OY) considéré comme appartenant au faisceau O, c'est-à-dire les tangentes à C_m^n issues de Y; de même, les tangentes au point n- uple O sont les rayons qui projettent du point O les points où s est coupée par les tangentes menées à C_m^n aux points où cette courbe est coupée par la droite | OY |.

Outre les deux points multiples Y et O, la courbe possède d'autres points doubles ordinaires que nous allons déterminer : lorsque le rayon y varie dans le faisceau Y, les $\frac{1}{2}n(n-1)$ intersections mutuelles des tangentes t_1, t_2 ,... t_n engendrent une courbe C^ν dont l'ordre est

$$\nu = \frac{1}{2}(2n-3)m;$$

les points D_1,... D_ν où cette courbe est coupée par s sont des points simples formés chacun par l'intersection d'une couple de tangentes homologues, c'est-à-dire dont les points de contact sont alignés avec Y sur une droite y_ν. Cela posé, au rayon y_ν du faisceau Y correspondent, dans le faisceau O, n rayons parmi lesquels deux vont coïncider en la droite $o_\nu \equiv$ | OD |; autrement dit, les droites y_ν sont des rayons de diramation du faisceau Y. Au rayon o_ν de O correspondent en Y, m rayons dont deux coïncident en y_ν; donc les ν rayons o_ν sont des rayons de diramation du faisceau O, mais ils doivent, aussi bien que les ν rayons y_ν, être comptés doubles et les points $(y_\nu o_\nu)$ donnent lieu sur C_{3m}^{n+m} à ν points doubles ordinaires. La courbe n'a pas d'autres points

(*) Schoute, *loc. cit.*

multiples, outre ceux que nous avons trouvés et qui équivalent ensemble à

$$\frac{1}{2}m(m-1)+\frac{1}{2}n(n-1)+\frac{1}{2}(2n-3)m=\frac{1}{2}[(m+n)^2-4m-n]$$

points doubles ordinaires, car elle est du genre

$$\frac{1}{2}(n-1)(n-2),$$

et l'on vérifie sans peine que

$$\frac{1}{2}(m+n-1)(m+n-2)-\frac{1}{2}(n-1)(n-2=\frac{1}{2}[(m+n)^2-4m-n].$$

Les deux faisceaux Y et O ont respectivement $2m(n-1)$ et $2n(m-1)$ rayons de diramation (*), $(2n-3)m$ desquels, pour chacun des deux faisceaux, sont absorbés par les rayons projetant les points doubles ordinaires ; à une tangente t de C_m^n issue de Y correspond dans le faisceau O un groupe de n rayons parmi lesquels deux sont réunis en le rayon qui joint O à (st), donc les m tangentes de C_m^n issues de Y sont des rayons de diramation du faisceau m uple et touchent C_{3m}^{n+m} sur la droite s ; comme

$$(2n-3)m+m=2m(n-1),$$

le faisceau Y ne peut posséder d'autres rayons de diramation. Dans le faisceau O, les droites qui projettent les points où C_m^n est coupée par s sont évidemment des rayons de diramation et touchent C_{3m}^{n+m} sur la droite s ; des $m+n=n^2$ points du lieu placés sur s, m sont donc les points de contact des tangentes qui lui arrivent du point m uple, et les autres sont les points de contact des tangentes issues du point n uple. Il y a encore $3m-3n$ autres tangentes issues de O, qui forment les rayons de diramation restants du faisceau O. Si la tangente T au point d'inflexion I de C_m^n coupe s au point η, au rayon $|O\eta|$ du fais-

(*) Weyr, *loc. cit.*, § 6.

ceau O en correspondent m du faisceau Y parmi lesquels deux coïncident dans le rayon double | YI |, car la tangente stationnaire t compte pour deux tangentes de C^n issues de η; | $O\eta$ | est donc un rayon de diramation du faisceau O et le point $I' \equiv (| O\eta |, | YI |)$ est le point de contact de la tangente | $O\eta$ | à la transformée. Ces rayons de diramation sont en même nombre que les points stationnaires de C_m^n, à savoir, puisqu'il n'y a pas de rebroussements (*), $3(m - n)$ et, comme

$$(2n - 3)\, m + n + 3\,(m - n) = 2n(m - 1)\,,$$

le faisceau n uple O ne possède pas d'autres rayons de diramation.

2. Supposons maintenant que Y tombe sur la droite s (fig. 3): les résultats précédents subsistent encore, mais il faut remarquer que dans ce cas les tangentes au point m uple Y coïncident avec les autres m tangentes que l'on peut mener à C_{3m}^{n+m} du point Y, c'est-à-dire avec les tangentes menées par ce point à la courbe primitive C_m^n; sur chaque branche de la courbe passant par Y la tangente en Y a avec la courbe une rencontre triponctuelle et par suite Y est un *point* m *uple d'inflexion*. Nous avons donc le théorème:

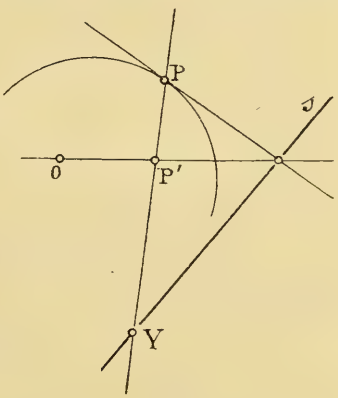


Fig. 3.

« *Étant donnés dans un plan une courbe générale, de l'ordre* n *et de la classe* m, *deux points fixes* Y, O *et une droite fixe* s, *passant par* Y : *si l'on fait correspondre à un point variable* P *de* C_m^n *l'intersection* P' *du rayon* | Y P | *avec celui qui projette de* O *la trace sur la droite* s *de la tangente en* P, *le lieu de* P' *est une courbe* $C_{3m}^{(n^2)}$ *du même genre que* C_m^n, *de l'ordre* n^2 *et de*

(*) Salmon, *Courbes planes*, p. 93, formule (7) de l'édition française.

la classe 3m*; ayant un point* n uple *ordinaire en* O, *un point* m uple *d'inflexion en* Y *et*

$$\frac{1}{2}m(2n-3)$$

points doubles ordinaires; il passe par les points de contact des tangentes à C_m^n *issues de* O *et par les points où* C_m^n *est coupée par* s; *les tangentes en ces derniers points vont se couper en* O. »

Nous désignerons la transformation indiquée par le symbole [Y, O, s], et appellerons Y *premier pôle*, O *deuxième pôle*, s *axe* de la transformation; si *s* est à l'infini, nous avons la transformation *pseudo-newtonienne;* si *s* est une droite propre et si les deux pôles sont à l'infini sur deux droites rectangulaires, la transformée de C_m^n en est la Robervallienne.

Lorsque C_m^n a $\varkappa$ rebroussements de la première espèce, et pas d'autres singularités, son genre est

$$\frac{1}{2}(n-1)(n-2)-\varkappa$$

et sa classe

$$n(n-1)-3\varkappa;$$

sa transformée est toujours du degré $n+m$, le premier pôle est un point m uple ordinaire, mais comme la courbe C^ν considérée dans le numéro 1 est maintenant du degré

$$\frac{1}{2}[(2n-3)m-\varkappa],$$

les autres points doubles sont aussi au nombre de

$$\frac{1}{2}[(2n-3)m-\varkappa],$$

et l'on vérifie sans peine que

$$\frac{1}{2}(m+n-1)(m+n-2)-\frac{1}{2}m(m-1)-\frac{1}{2}n(n-1)$$

$$-\frac{1}{2}[(2n-3)m-\varkappa]=\frac{1}{2}(n-1)(n-2)-\varkappa,$$

ce qui revient à dire qu'il n'y a pas d'autres points multiples. Pour déterminer la classe de la transformée, il suffit d'observer que parmi les points doubles fournis par la courbe C^{ν}, il y en a $\varkappa$ qui sont des rebroussements, tandis que les autres

$$\frac{1}{2}[(n-3)m-3\varkappa]$$

sont des points doubles ordinaires : la classe est donc

$$(m+n)(m+n-1)-m(m-1)-n(n-1)$$
$$-[(2n-3)m-3\varkappa]-3\varkappa=3m;$$

nous en concluons que, *même lorsque la courbe primitive* C_m^n *a* $\varkappa$ *rebroussements de la première espèce, la transformée est toujours du degré* n + m *et de la classe* 3m.

3. Si C_m^n a des relations particulières de position avec les pôles ou avec l'axe de la transformation, ou bien si elle possède d'autres singularités que des rebroussements, les résultats qui précèdent subissent des modifications que l'on doit établir dans chaque cas déterminé; néanmoins, pour traiter des cas même relativement simples, il est nécessaire d'indiquer ces modifications lorsque les pôles sont des points multiples ou bien si les droites s et | Y O | sont des tangentes multiples de la courbe primitive.

a) Lorsque le premier pôle est un point simple de C_m^n, à chaque rayon o du faisceau O correspondent dans le faisceau Y les m rayons qui projettent les points de contact avec C_m^n des tangentes issues du point (os); mais à un rayon de Y en correspondent $n-1$ du faisceau O, et la droite | OY | se sépare une fois du lieu. De même si Y est un point μ uple ordinaire sur C_m^n, la droite | OY | se détache μ fois de la transformée qui est le produit de deux faisceaux Y et O en correspondance $(m, n-\mu)$ et par suite de l'ordre $m+n-\mu$.

Si Y est un point simple de C_m^n, deux des m rayons correspondant en Y au rayon | OY | vont se confondre en la tangente de C_m^n au point Y : de même, chaque passage de C_m^n par le premier pôle donne naissance à une coïncidence de deux tangentes

au point m uple d'inflexion. Si Y est un point d'inflexion (simple) de C_m^n, avec la tangente stationnaire correspondante vont se confondre trois des m tangentes en Y, etc.

b) Le degré de la transformée n'est pas altéré si le deuxième pôle O est sur C_m^n un point multiple de l'ordre ω ($\leqslant 1$); mais dans ce cas, parmi les tangentes à C_{3m}^{n+m} en O, il y en a ω qui coïncident avec celles de C_m^n au même point.

c) Lorsque l'axe s est une tangente multiple ordinaire de l'ordre σ de C_m^n, il se détache σ fois de la transformée, et la courbe résiduelle, de l'ordre $m + n - \sigma$, est le produit de deux faisceaux Y et O en correspondance $(m - \sigma, n)$. Y est un point $(m - \sigma)$ uple d'inflexion, etc.

Si s est une tangente stationnaire de C_m^n, elle se détache deux fois de la transformée, etc.

d) Lorsque la droite | OY | qui joint les deux pôles est une tangente simple de la courbe primitive, considérée comme rayon du faisceau O, il lui correspond, dans le faisceau Y, m rayons dont un est | YO |, et comme ce dernier rayon est un rayon de diramation du faisceau Y, les deux faisceaux Y et O sont en position réduite du premier ordre (*); la droite | YO | se détache de leur produit, et la courbe résiduelle a un point $(m-1)$ uple ordinaire en O, et touche en ce point la droite | OY | : de même, si la droite | YO | est tangente ρ uple de C_m^n, les deux faisceaux Y et O sont en position réduite de l'ordre ρ, et leur produit est une courbe de l'ordre $m + n - \rho$ ayant un point $(m - \rho)$ uple d'inflexion en Y et un point $(n - \rho)$ uple ordinaire en O (**).

4. Nous allons maintenant appliquer la transformation à une conique C_2^2 en position générale par rapport à l'axe et aux pôles (fig. 4) : la transformée est une quartique C_6^4 de la sixième classe ayant un (seul) point d'inflexion au premier pôle et un point double ordinaire au deuxième pôle. Pour

(*) Weyr, *loc. cit.*, § 50.

(**) Id., *loc. cit.*, § 52.

déterminer le troisième point double V, je mène par Y la droite s' conjuguée de s par rapport à C_2^2; la droite qui joint O au pôle de s' par rapport à C_2^2 va couper s' au point cherché, car dans le cas actuel la courbe C^y (voir n° 1) se réduit à la polaire de Y par rapport à C^2. Comme du point O arrivent à la quartique deux autres tangentes, savoir les rayons qui projettent les points où C_2^2 est coupée par s, aucune des tangentes au point double O n'est stationnaire, et, d'après un théorème d'Ameseder (*), le troisième point double non plus n'a de tangentes stationnaires.

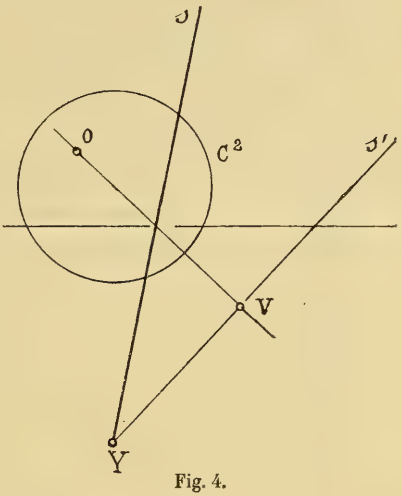


Fig. 4.

La propriété caractéristique de ces quartiques, qui ont un point double d'inflexion et deux points doubles ordinaires, est la suivante : « Les points de contact de la courbe avec ses deux tangentes issues d'un point double ordinaire sont alignés avec le point double d'inflexion Y, sur la droite séparée harmoniquement par les tangentes d'inflexion en Y de celle qui joint Y avec le troisième point double (**). »

(*) Si dans une courbe du quatrième ordre et de la sixième classe il y a plus de deux tangentes aux points doubles qui sont stationnaires, les autres tangentes aux points doubles sont aussi stationnaires. (*Sitzber. d. Wiener Akad. d. Wiss.*, Bd 83, S. 881.)

(**) En prenant les points doubles pour sommets du triangle de référence, et si Z est le point double d'inflexion, l'équation de la quartique peut se mettre sous fa forme

$$(ay^2 + 2hxy + bx^2)\,z^2 + cx^2y^2 = 0,$$

la cubique polaire du sommet Y est

$$(az^2 + cx^2)\,y + hxz^2 = 0$$

et la droite conjuguée harmonique du côté $y = 0$ par rapport aux tangentes

Il découle immédiatement de la génération indiquée de la quartique que « deux points de la courbe alignés avec le point double d'inflexion sont séparés harmoniquement de ce dernier par la droite qui joint les deux autres points doubles », et que les tangentes en deux points alignés avec le point double d'inflexion vont se couper sur la droite qui joint les deux autres points doubles; on peut réunir ces deux théorèmes connus (*) en l'énoncé unique : « Une quartique rationnelle ayant trois points doubles, dont l'un est d'inflexion, est homologique harmonique lorsque l'on prend le point double d'inflexion pour centre et la droite qui joint les deux autres points doubles pour axe d'homologie. »

Réciproquement, étant donnée une courbe du quatrième ordre et de la sixième classe C_6^4 ayant un seul de ses trois points doubles d'inflexion, si C^2 est une conique inscrite dans l'angle des tangentes au point double d'inflexion Y, et passant par les points de contact O_1, O_2 des tangentes menées à C_6^4 par l'un des autres points doubles, par exemple de O : la transformée de C^2 est C_6^4 lorsque l'on prend $| O_1O_2 | \equiv s$ pour axe, Y pour premier pôle et O pour deuxième pôle. En effet, C_6^4 et cette transformée ont en commun le point double Y avec les mêmes tangentes d'inflexion, le point double O avec les mêmes tangentes et les deux points simples O_1, O_2 aussi avec les mêmes tangentes, ce qui équivaut à dix-huit $(8 + 6 + 4)$ points communs.

5. Le cas où le deuxième pôle et l'axe sont pôle et polaire par rapport à C^2 doit être considéré à part : en ce cas, le troi-

d'inflexion en Z est $hy + bx = 0$; cela posé, nous avons identiquement

$$[(ay^2 + 2hxy + bx^2)z^2 + cx^2y^2] - xz^2(hy + bx) = y[(az^2 + cx^2)y + hxz^2]$$

et le théorème est démontré. L'absence du terme linéaire en z dans l'équation de la quartique montre immédiatement que la couche est *homologique-harmonique*, $x = y = 0$ étant le centre et $z = 0$ l'axe d'homologie.

(*) Ameseder, *Ueber rationale Curven vierter Ordnung, deren Doppelpunktstangenten zum Theil oder ganz in Inflexionstangenten übergehen.* (Sitzber. der W. Ak., Bd 79.)

sième point double V se réunit au point double O formant un tacnode en O; la polaire du point double d'inflexion par rapport à C^2 est la tangente tacnodale. La transformée est donc une quartique de sixième classe ayant un tacnode en O et un point double d'inflexion en Y : on pourrait l'appeler *cappa projectif*, car si C^2 est un cercle ayant son centre en O, elle devient la courbe appelée *cappa* (*).

Les points de contact des tangentes menées à un cappa projectif par son tacnode sont donc alignés avec le point double d'inflexion et séparés harmoniquement par ce point et la tangente tacnodale.

Le *cappa* (proprement dit) est donc une quartique circulaire de la sixième classe ayant un tacnode en son centre et un point double d'inflexion à l'infini sur la perpendiculaire à la tangente tacnodale; les deux tangentes qui arrivent au cappa du tacnode sont les droites isotropes issues de ce point, autrement dit, le tacnode est aussi le foyer singulier de la courbe. Les tangentes d'inflexion au point double à l'infini touchent C^2 sur la tangente tacnodale; le cercle C^2 et le *cappa*, ayant entre eux double contact aux points circulaires à l'infini, ont quatre autres points communs qui, par la définition même de la transformation, sont sur les bissectrices des angles des axes. Observons aussi que le *cappa* n'a pas de tangentes doubles proprement dites, car les quatre de ces tangentes, possédées en général par une quartique de la sixième classe, sont absorbées par les deux tangentes au point double d'inflexion et par la tangente tacnodale; quant aux points d'inflexion, deux tombent en le point double à l'infini et les quatre autres sont absorbés par le tacnode.

6. Par la transformation qui nous occupe, on peut obtenir les cubiques de la quatrième classe, comme transformées de coniques de deux manières différentes:

a) en prenant les deux pôles sur une tangente à C^2;

b) en prenant pour axe une tangente à C^2.

(*) Brocard, *loc. cit.*, p. 5.

Dans le premier cas, la transformée est une C_4^3 ayant un point d'inflexion au premier pôle Y, touchant | YO | au deuxième pôle O, et passant par les deux points O_1, O_2 de rencontre de C^2 avec s; ces deux points sont les antitangentiels de O; la tangente stationnaire en Y est l'autre tangente, outre | Y O |, de C^2 issue de Y; le point double est l'intersection de la droite menée par Y et conjuguée à s, avec celle qui unit O au conjugué harmonique de Y par rapport à O_1 O_2.

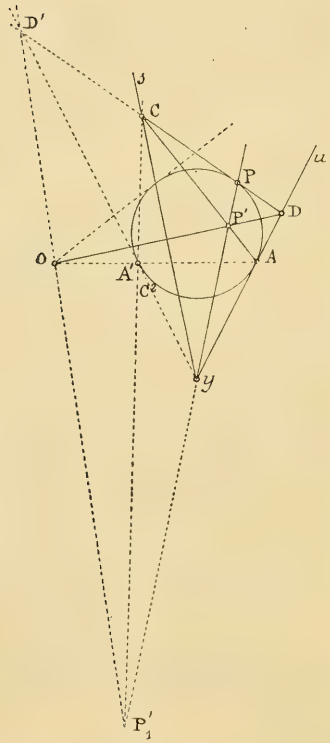


Fig. 5.

Réciproquement, étant donnée une C_4^3, si O est l'antitangentiel d'un point réel d'inflexion Y, et si O_1, O_2 sont les deux antitangentiels de O, t la tangente (stationnaire) en Y : à chaque conique C^2 passant par les deux points O_1 O_2 et tangente aux droites | Y O |, t, correspond C_4^3 par la transformation [Y, O, | O_1 O_2 |].

Quand l'axe s touche C^2 au point O, la transformée est une C_4^3 ayant un point d'inflexion au premier pôle Y, et touchant C^2 en O; le point double V se confond avec le deuxième pôle, la tangente stationnaire en Y est l'autre tangente de C^2 issue de Y, les deux antitangentiels O_1, O_2 de O sont alignés avec Y sur la droite s harmoniquement séparée de | Y V | par C^2. Réciproquement, étant donnée une C_4^3, si O est l'antitangentiel d'un point d'inflexion Y et si O_1 et O_2 sont les antitangentiels de O, V le point double et t la tangente en Y : la transformée de la conique C^2, passant par O_1 et O_2, touchant | Y O | $\equiv u$ en O et tangente à t, au moyen de [Y, V, u], est C_4^3.

7. Supposons maintenant que les deux pôles Y et O de la transformation soient conjugués par rapport à C^2, et soit s la polaire de O par rapport à C^2 et A le point de contact d'une tangente à C^2 issue de Y. Si une tangente variable touche C^2 au point P et coupe respectivement s et | Y A | aux points C et D, on reconnaît aisément que les droites | OD | et | AC | vont se couper en un point P′ du rayon | YP | (*); il s'ensuit que la transformée de C^2 par [Y, O, | YA |] est aussi sa transformée au moyen de [Y, A | Y C |].

En choisissant convenablement la conique à transformer, ses pôles et l'axe de la transformation, on obtient de nouvelles générations pour la plupart des cubiques ayant reçu un nom, et l'on peut établir aisément pour ces courbes, non seulement les propriétés connues, mais aussi d'autres que je crois nouvelles.

Conchoïde Slusienne générale. — Si C^2 est une ellipse, prenons pour le pôle Y le point à l'infini dans la direction du petit axe, et soit u la tangente au sommet A du grand axe. Prenons le deuxième pôle O sur le grand axe AA′ à une distance $\overline{OA}$ de A égale en valeur absolue au demi petit axe; la transformée de C^2 au moyen de [Y, O, u] sera une conchoïde Slusienne (**) ayant le point double en O, le sommet en A, et pour asymptote d'inflexion la tangente à l'ellipse en A′.

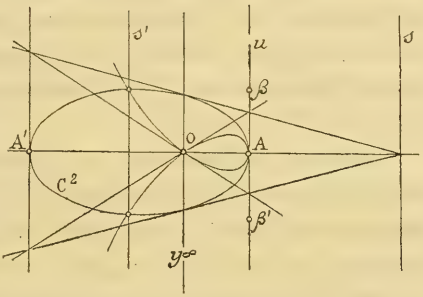


Fig. 6.

(*) En rejetant à l'infini la tangente |YA|, on tombe sur une propriété évidente de la parabole.

(**) La droite à l'infini coupe l'ellipse C^2 en deux points dont les tangentes, savoir les asymptotes imaginaires, vont couper u aux points doubles de l'involution $(A, \infty\,;\ \beta, \beta')$, où $\overline{\beta'A} = \overline{A\beta} =$ à la moitié du petit axe; lorsque l'angle $\beta O\beta'$ est droit, $OA = A\beta$ et les points à l'infini, outre Y, de la transformée sont les points circulaires.

**

Elle coupe C^2 sur la polaire s de O, et sur la droite s' harmoniquement séparée de s par le point double et l'asymptote d'inflexion; les deux points antitangentiels du sommet A sont les intersections de C^2 avec la polaire de O; les tangentes au point double sont les diagonales du quadrilatère simple formé par les deux tangentes à l'ellipse en AA′ et par celles qui la touchent sur | YO |, etc.

On obtient la même conchoïde en appliquant à la même ellipse C^2 la transformation [Y, A, s].

Strophoïde droite. — Lorsque C^2 est un cercle ayant O pour centre, si Y est à l'infini et $\overline{A'A}$ un diamètre perpendiculaire à la direction Y, la transformée de C^2 par [Y, O, u] est la strophoïde droite ayant le nœud en O et le sommet en A; la tangente au cercle en A′ est l'asymptote d'inflexion, les tangentes en O sont rectangulaires. La droite des points d'inflexion est symétrique de l'asymptote d'inflexion par rapport au centre du segment $\overline{OA}$; la médiatrice du segment $\overline{AO}$ coupe la cubique sur le cercle C^2; les tangentes de la strophoïde aux points circulaires à l'infini vont se couper au sommet A, etc. On obtient la même strophoïde en appliquant au cercle C^2 la transformation pseudo-newtonienne [Y, O, ∞] (*).

Trisectrice de Maclaurin. — C^2 est une ellipse dont le petit axe $\overline{A'A}$ est les $\frac{2}{3}$ du grand axe, u sa tangente au sommet A, le premier pôle Y est à l'infini de u, $A'O = \frac{1}{3}OA$; la polaire s du deuxième pôle O par rapport à C^2 est symétrique de u par rapport à O; cela posé, en appliquant à C^2 soit la transformation [Y, O, u], soit la [Y, A, s], on obtient la trisectrice de Maclaurin ayant le sommet en A, le nœud en O et la tangente à l'ellipse en A′ par asymptote d'inflexion. La cubique est circulaire; les tangentes au nœud forment l'angle $\frac{\pi}{3}$; la distance $\overline{OA'}$ du nœud à l'asymptote d'inflexion est $\frac{1}{3}$ de celle du nœud au sommet. La droite des points d'inflexion est à l'infini et *les deux*

(*) Dans la transformation pseudo-newtonienne, une translation de la courbe primitive dans la direction du premier pôle n'altère pas la transformée, comme il est évident soit géométriquement, soit par l'analyse. (Cf. Hensel, *loc. cit.*, § 4.)

points d'inflexion imaginaires de la courbe sont les deux points circulaires à l'infini. Observons encore que la cubique coupe C^2, outre qu'en les deux points réunis en A sur u, sur la polaire s de O et sur la droite s', harmoniquement séparée de s par l'asymptote d'inflexion et le point double (*).

Folium de Descartes. — Prenons maintenant pour C^2 une ellipse dont l'excentricité $e = \frac{1}{2}$. Soit O un foyer (à gauche), A' le sommet le plus proche de O, et A l'autre sommet; nous avons $3\overline{A'O} = OA$ et la distance de la directrice s (polaire de O) au sommet A' est égale au demi grand axe. En dénotant comme auparavant par u la tangente en A et par Y le point à l'infini de u, nous avons pour transformées de C^2, soit au moyen de [Y, O, u], soit au moyen de [Y, A, s], le *folium de Descartes* ayant le sommet en A et le nœud en O; la tangente à l'ellipse en A' est l'asymptote d'inflexion et les tangentes en O sont rectangulaires. La droite des points d'inflexion est à l'infini, et si nous prenons sur la tangente u du sommet A les segments $AB = -AC = OA : \sqrt{3}$ (égaux à la moitié du petit axe de C^2), les rayons doubles de l'involution quadratique O(A, ∞; B, C) marquent sur la droite à l'infini les deux points d'inflexion imaginaires du *folium*.

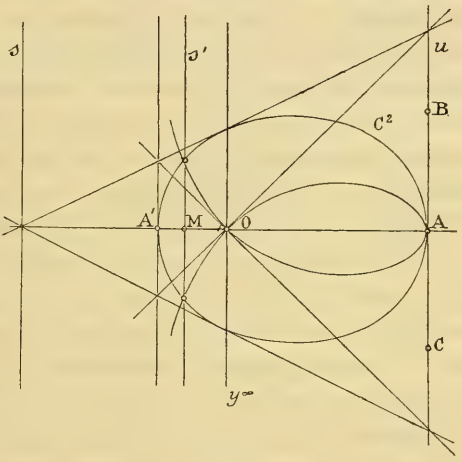


Fig. 7.

(*) En prenant pour C^2 un ellipse dont le petit axe A'A est $\frac{1}{3}$ du grand axe, on obtient la cubique circulaire considérée par M. Jerabek (*Mathesis*, octobre 1898). Voir aussi ma note sur la même cubique. (*Ibid.*, t. IX, pp. 87-89.)

Les points antitangentiels du sommet A sont les intersections de C^2 avec la directrice s, et les deux autres points communs au *folium* et à l'ellipse C^2 peuvent se construire en observant que la droite s', séparée harmoniquement de s par le nœud et l'asymptote d'inflexion, coupe | A'A | en un point M tel que $A'M = \frac{2}{5} A'O$.

Folium parabolique droit. — C^2 est une parabole ayant son foyer en O et son sommet en A, s est la directrice, u la tangente au sommet, s' la symétrique de s par rapport à O : la transformée de C^2 par les deux transformations indiquées est le folium parabolique droit ayant le sommet en A et le nœud en O. Les tangentes en O sont rectangulaires et la droite à l'infini est tangente stationnaire; les deux antitangentiels de A sont les points où la parabole est coupée par sa directrice, et les deux autres intersections du *folium* avec la parabole sont sur s'. Les deux points d'inflexion imaginaires sont sur la parallèle à u dont les distances à u et à s sont entre elles dans le rapport 1 : 2.

Cubique mixte. — C^2 est une parabole, A son point à l'infini, u la droite à l'infini, Y le point à l'infini, de la tangente au sommet, O sur l'axe de la parabole : la cubique dérivée de C^2 par la transformation pseudo-newtonienne [Y, O, u] touche la parabole en son point à l'infini A, a un point double en O et la tangente au sommet A' de la parabole pour asymptote d'inflexion. Elle passe par les deux points où C^2 est coupée par la polaire s de O, et ses tangentes en ces points sont parallèles à l'axe de symétrie; la droite des points d'inflexion est parallèle à s et à une distance de cette droite égale à celle du point O. Cette cubique a été étudiée par M. Henkel sous le nom de *tangentencurve* de la parabole (*); en particulier, si O est sur la directrice de la parabole C^2, nous avons la cubique appelée *mixte* par M. De Longchamps. En appliquant à la parabole C^2 la transformation [Y, A^∞, s], on obtient la cubique de M. Henkel et celle de M. De Longchamps comme Robervalliennes.

(*) *Inaugural Dissert.*, citée.

Cubique d'Agnesi. — C^2 est une ellipse dont le petit axe A'A est la moitié du grand axe; O et Y sont à l'infini dans les directions respectivement du petit et du grand axe, u est la tangente

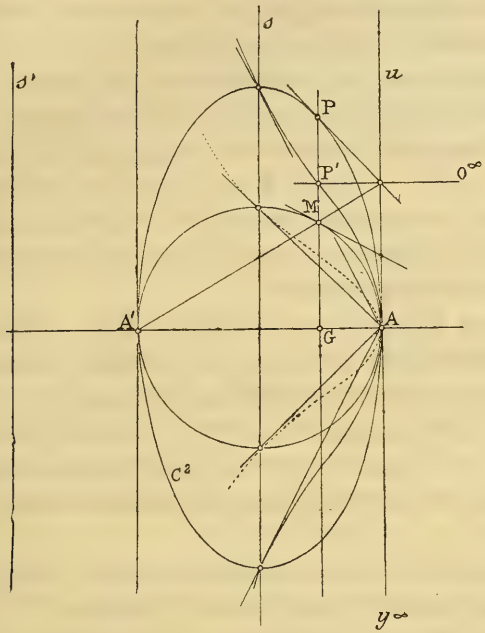


Fig. 8.

au sommet A, s la droite du grand axe, s' la droite symétrique de s par rapport à la tangente au sommet A' : la transformée de C^2 soit par [Y, O^∞, u], soit par [Y, A, s] est la *versiera* d'Agnesi (*), et la première de ces générations montre qu'elle

(*) Si G est le pied de l'ordonnée du point P de l'ellipse, et ω l'intersection de la tangente en P avec l'axe |AY|, la droite |A'ω| coupe le cercle décrit sur le diamètre $\overline{A'A}$ au centre M du segment $\overline{PG}$: cela posé, les triangles semblables A'MG et A'ωA donnent A'G : GM = A'A : Aω, ou bien A'G : GM = A'A : GP', et cette proportion montre que le lieu de P' est bien celui défini par Agnesi. (*Instituzioni analitiche*, t. I, p. 381. Milano, 1748.)

est une Robervallienne de l'ellipse C^2. La *versiera* passe par les sommets de C^2 sur le grand axe, touche C^2 au sommet A, a un point double isolé à l'infini en O; la tangente à C^2 au sommet A′ est asymptote d'inflexion. Les deux autres points d'inflexion réels de la cubique tombent sur la médiatrice du segment qui joint le centre de l'ellipse au sommet A, et on les construit par suite aisément; les antitangentiels du sommet A sont les points extrêmes du grand axe de C^2. Nous pouvons construire aussi les tangentes, imaginaires conjuguées, au point double comme il suit : le sommet A de la cubique, considéré comme cercle-point, marque sur l'asymptote d'inflexion deux points imaginaires conjugués qui sont projetés du point double suivant les deux tangentes cherchées.

Du cercle C_1^2 décrit sur le diamètre $\overline{A'A}$, on déduit, par les deux transformations indiquées, une cubique ayant même sommet A, même asymptote d'inflexion (la tangente en A′) et les ordonnées perpendiculaires à | A′A | moitiés de celles de la *versiera;* c'est la courbe que l'on a quelquefois confondue avec l'*Agnesienne* et que M. Loria appelle *pseudo-versiera* (*).

8. Nous allons traiter des cas relativement assez simples où la courbe primitive C_m^n est d'un degré supérieur à 2. Supposons d'abord que C_m^n soit une cubique cuspidale en position générale : nous avons $m = n = 3$, la transformée est du sixième ordre et du genre zéro, a un point triple d'inflexion au premier pôle Y, un point triple ordinaire au deuxième pôle O et $\frac{1}{2}[(2 \times 3 - 3)3 - 1] = 4$ points doubles dont un est un rebroussement de la première espèce, dû au rebroussement de la courbe primitive; on en conclut $\delta = 9$, $\varkappa = 1$ et la classe de la transformée est 9.

Si la courbe primitive C_3^3 a un point simple au premier

(*) *Versiera, Visiera e Pseudo-versiera.* (*Bibliotheca mathematica* de M. G. Enestrom, Stockholm, 1897, pp. 7-12.) Voir aussi les notes de MM. D'Arcais, Peano et Rébière dans l'*Interméd. des Mathém.*, année 1895, p. 83.

pôle Y, sa transformée (voir le n° 5, *a*) est une quintique unicursale ayant en Y un point triple d'inflexion avec une coïncidence (deux des tangentes stationnaires vont tomber sur la tangente de C_5^3 en Y), un point double au deuxième pôle, et deux autres points doubles que l'on détermine sans peine en observant que dans le cas actuel la courbe C' est une conique (*); comme le point triple est équivalent à deux points doubles ordinaires et un rebroussement de première espèce, nous avons $\delta = 3 + 2 = 5$, $\varkappa = 1$ et la transformée est de la classe 7.

Si la courbe primitive est une cubique C_4^3 de la quatrième classe ayant un point d'inflexion au premier pôle Y et son point double au deuxième pôle O, sa transformée est le produit d'un faisceau quadruple Y et d'un faisceau double O ; cette dernière courbe est donc unicursale et du sixième degré, et a en O un point double avec les mêmes tangentes de C_4^3 (voir § 5 *b*) ; Y est un point quadruple spécial d'inflexion, trois des tangentes stationnaires en ce point coïncident avec la tangente stationnaire de C_4^3 et l'autre est la tangente à C_4^3 issue de Y; la sextique possède encore trois autres points doubles (**).

Considérons encore la transformée pseudo-newtonienne du *folium parabolique droit* en prenant le sommet A du folium pour deuxième pôle. La droite | AY | se détache une première fois de la transformée, car elle est tangente à la primitive (n° 3, *d*), et une deuxième fois, car Y est un point simple (n° 3, *a*); la droite à l'infini s'en détache deux fois, car elle est tangente stationnaire en Y (n° 3, *c*). La courbe résiduelle est donc une cubique parabolique ayant un point d'inflexion en Y et un point isolé en A (***).

Si la courbe donnée est une quartique tricuspidale, C_3^4 en

(*) Salmon, *Courbes planes*, p. 259 de l'édition française.

(**) On ne connaît pas, je crois, l'abaissement de la classe dû à la singularité extraordinaire rencontrée au point quadruple Y. Pour le cas du *folium de Descartes*, comparez Brocard, *loc. cit.*, p. 10.

(***) Si l'équation du folium parabolique, rapporté à l'axe de symétrie et à la tangente au sommet, est $x(x + a^2) = ay^2$, celle de sa transformée pseudo-newtonienne est $9x^5 = a(5x^2 + 4y^2)$.

position générale, sa transformée est unicursale et du degré 7, a un point triple d'inflexion au premier pôle et un point quadruple ordinaire au second pôle; comme la courbe C^{ν} dans le cas actuel est du degré $\frac{1}{2}[(2 \cdot 4 - 3)3 - 3] = 6$, et que des six points doubles auxquels elle donne lieu il y en a trois qui sont des rebroussements de première espèce, correspondant aux trois rebroussements de la courbe primitive, nous avons $\delta = 6 + 3 + 3 = 12$, $\varkappa = 3$, et la transformée est de la classe 9.

Milan, le 20 mai 1899.

NOUVEAUX

PRINCIPES DE LA GÉOMÉTRIE

AVEC

UNE THÉORIE COMPLÈTE DES PARALLÈLES

PAR

LOBATCHÉVSKY.

Traduit du russe pour la première fois par F. Mallieux, *avocat, docteur en philosophie.*

AVANT-PROPOS

C'est la préparation d'une thèse pour le doctorat en philosophie qui me fit lire les œuvres de Lobatchévsky : une étude critique sur les travaux de Joseph Delbœuf, en Géométrie, m'obligeait à connaître les fondateurs de la Géométrie non-euclidienne dont Delbœuf s'était occupé, et ainsi, se joignit, en appendice à mon essai, la traduction de plusieurs passages empruntés aux « Nouveaux Principes » du novateur russe. J'avais, du reste, été guidé dans ce choix par M. Vassiliév, professeur à l'Université de Kazan et président de la *Société Lobatchévsky ;* je tiens à le remercier ici même des documents qu'il m'a communiqués et de l'affabilité qu'il m'a témoignée. Un maître distingué et dévoué, dont j'avais suivi les cours un certain temps à l'Université de Liége, m'engagea à traduire complètement les « Nouveaux Principes », et voulut se charger de lire le manuscrit. Or, l'interprétation du texte présentait des difficultés provenant aussi bien de la nature du sujet traité que du tour particulier donné à la pensée, ou du vieillissement de la langue : les conseils de M. J. Neuberg m'étaient donc précieux et je lui en suis très reconnaissant; il a entrepris et achevé avec une bonne grâce exquise un travail ardu et désagréable. La Société Royale des Sciences de Liége a réservé à la traduction une place dans ses *Mémoires :* ma gratitude est extrême et je suis heureux que quelques lignes au moins me soient laissées pour le dire.

Pendant la correction des épreuves, j'ai pu comparer ma traduction à celle que M. Fr. Engel vient de publier(*), m'éclairer ainsi sur certains passages difficiles et tenir compte de ses corrections.

Octobre 1899.

F. Mallieux.

(*) *Urkunden zur Geschichte der nicht-euklidischen Geometrie,* herausgegeben von Fr. Engel und P. Staeckel. — Nikolaj Iwanowitsch Lobatschefskij, *Zwei geometrische Abhandlungen,* übersetzt von Fr. Engel. Leipzig, Teubner, 1899.

INTRODUCTION

Chacun sait qu'en Géométrie la théorie des parallèles est jusqu'à présent demeurée imparfaite. L'inanité des efforts tentés depuis l'époque d'Euclide, dans le cours de deux mille ans, m'a conduit à soupçonner que la vérité à établir n'était pas impliquée dans les notions antérieures et que, pour la démontrer, il fallait, ainsi que cela a lieu pour d'autres lois de la nature, recourir à des expériences, par exemple aux observations astronomiques. Convaincu enfin de la justesse de mes conjectures et jugeant cette question difficile ainsi résolue, j'écrivis en 1826 un travail sur ce sujet (*). La nouvelle théorie est également appliquée à l'analyse dans des articles insérés en 1829 et 1830 dans le *Kazansky Viéstnik*, sous l'intitulé : *Des principes de la Géométrie*. Le résultat principal auquel j'aboutis en supposant que les lignes dépendent des angles, autorise la possibilité de l'existence d'une géométrie dans un sens plus étendu que celui d'Euclide. Je donnai le nom de *Géométrie Imaginaire* à la science ainsi élargie où entre comme cas particulier la *Géométrie Usuelle*, lorsqu'on introduit dans l'hypothèse générale les restrictions exigées par les mesures. Dans un travail qui fut récemment imprimé dans les

(*) *Exposition succincte des principes de la Géométrie, avec une démonstration rigoureuse du théorème des parallèles ;* ce travail a été lu à la séance de la Section physico-mathématique près l'Université de Kazan, le 12 février 1846, mais il n'a été imprimé nulle part.

Mémoires scientifiques de l'Université de Kazan (*), j'entrepris de montrer que les nouveaux principes suffisaient. A cette époque, désirant atteindre ce but, non pas tant directement, mais plutôt par la voie inverse qui est la plus courte, j'ai préféré aller de certains principes admis aux équations pour toutes les relations et aux expressions de toutes les grandeurs géométriques. Si ma découverte ne procurait d'autre avantage que de corriger un défaut dans l'enseignement des premiers principes, la seule attention que cet objet a constamment méritée m'obligerait déjà à en faire l'exposé en détail. Je commencerai par l'analyse des théories antérieures.

Il est facile de prouver que deux droites faisant un même angle avec une troisième ne se rencontrent jamais puisqu'elles sont alors perpendiculaires sur une même droite. Euclide a supposé inversement que deux lignes inégalement inclinées sur une troisième, doivent toujours se couper. Pour s'assurer de la vérité de cette proposition, on a recouru à différents moyens: tantôt on s'est efforcé de déterminer d'abord la somme des angles d'un triangle, tantôt on a comparé des surfaces planes infinies comprises dans l'ouverture des angles et entre des perpendiculaires, tantôt on a admis que les angles ne dépendaient que des rapports des côtés, enfin, on a complété la définition de la ligne droite par de nouvelles propriétés. De ces démonstrations, quelques-unes, sans doute, sont ingénieuses, mais toutes, sans exception, sont fausses, leurs points de départ sont insuffisants et elles manquent de la rigueur qu'on exige d'un raisonnement; on n'en trouve même aucune qui, étant simple et convaincante, puisse convenir à des commençants.

Legendre publia en 1800 la troisième édition de sa Géométrie où il insérait la proposition, que la somme des angles d'un

(*) Fascicule 1er des *Mémoires scientifiques* de 1835, sous le titre : *Géométrie Imaginaire*.

triangle ne peut dépasser π, c'est-à-dire deux droits. Il y démontrait également que cette somme ne doit pas être $< \pi$; seulement, il perdait de vue que les lignes peuvent ne plus former un triangle précisément au moment où la valeur de la somme, déduite par une autre méthode, présente quelque contradiction. Je ne crois pas nécessaire de m'étendre ici sur cette faute; Legendre lui-même l'a reconnue plus tard en déclarant que, si les principes admis par lui comme point de départ ne souffraient pas de doute, il rencontrait cependant des difficultés qu'il n'était pas en état de vaincre (*). Dans les *Mémoires de l'Académie de France* de 1833, il ajoute encore la proposition, que la somme des angles est égale à π dans tous les triangles si elle a cette valeur dans un seul. Il m'a fallu prouver aussi la même chose dans ma théorie écrite en 1826. Je trouve même que Legendre est parfois tombé sur la voie que j'ai si heureusement suivie; mais sans doute un préjugé en faveur de la proposition universellement admise l'a-t-il, à chaque pas, porté à conclure hâtivement ou à introduire prématurément des notions qu'il ne fallait plus admettre dans la nouvelle hypothèse. Examinons tout ce qu'il a imprimé en 1833 sur cet objet dans les *Mémoires de l'Académie de France.*

Dans le triangle ABC (fig. 1), tirons de A par le milieu I du côté BC, la ligne $AC' = AB$; prolongeons AB jusqu'à ce qu'on ait $AB' = 2AI$. On a le triangle $AB'C'$, où $B'C' = AC$ et où la somme S des angles est la même que dans le premier triangle ABC : l'angle CAB a passé dans le triangle $AB'C'$ en se divisant en deux aux points A, B'. Si en outre AB est le plus grand côté

(*) Voici les propres paroles de Legendre : « Nous devons avouer que cette seconde proposition, quoique le principe de la démonstration fût bien connu, nous a présenté des difficultés que nous n'avons pu entièrement résoudre » (*Mémoires de l'Académie des sciences de l'Institut de France*, t. XII, 1833, p. 371).

ou non moindre que les deux autres côtés du triangle ABC, et si BC est $\leqq$ AC, alors AC′ est $\geqq$ C′B′, l'angle opposé à B′C′ dans le triangle AB′C′ est au moins deux fois plus petit que l'angle CAB. En continuant ainsi, nous pouvons arriver à un triangle dont deux angles soient aussi petits que l'on veut; la somme des angles sera la même que dans le premier triangle ABC. Legendre pensait en conclure que, avec la diminution des deux angles, les deux côtés opposés se rapprochent de plus en plus du troisième, et que l'angle restant finit par arriver à deux droits; que, par suite, dans le triangle primitif, $S = \pi$, et qu'il en est de même dans tout triangle (*). Seulement le raisonnement est faux, parce que les côtés du triangle croissent à l'infini et que nous pouvons supposer que la limite dont s'approche l'angle $AC'B' < S$ est inférieure à π. Appelons A, B, C les angles du triangle ABC, aux points désignés par ces lettres; appelons encore A′, B′, C′ les angles de AB′C aux points A, B′, C′; enfin soit h la perpendiculaire abaissée de C′ sur AB′. D'après la méthode de la Géométrie Imaginaire, dans l'hypothèse $S < \pi$, nous trouvons:

$$\cot A' = \cot A + \frac{\sin C}{\sin A \sin B},$$

$$\cot B' = \cot A + \frac{\sin B}{\sin A \sin C},$$

$$e^h - e^{-h} = \frac{4}{\sin C}\sqrt{\cos\frac{1}{2}S\cos\left(\frac{1}{2}S - A\right)\cos\left(\frac{1}{2}S - B\right)\cos\left(\frac{1}{2}S - C\right)}\ (**),$$

e désignant la base des logarithmes népériens.

D'après les deux premières équations, on voit que A′, B′ sont toujours possibles et qu'avec la transformation des triangles ils

(*) *Réflexions sur la théorie des parallèles* (Mémoires de l'Académie des sciences, t. XII, pp. 390 et suiv.).

(**) Dans une note, M. Engel fait remarquer que A, B, C doivent être remplacés par A′ B′ C′. (F. M.)

diminuent jusqu'à zéro. La dernière équation donne chaque fois la hauteur h et détermine la limite de l'approchement

$$h = \log \cot \frac{1}{4} S ,$$

où l'on prend le logarithme de Néper.

Bien que Legendre ait dit sa preuve parfaitement rigoureuse, lui-même en pensait sans doute autrement, car il ajoutait que les difficultés, s'il s'en rencontrait, pourraient pourtant être écartées. Dans ce but, il recourt à des calculs fondés au surplus sur les premières équations de la Trigonométrie rectiligne qu'il aurait d'abord fallu établir et qui, dans ce cas, ne servent à rien et ne conduisent à aucune conclusion.

Désirant tout dire pour confirmer sa proposition, Legendre remarque que des triangles égaux, emboîtés partout par leurs angles inégaux, trois angles se trouvant en un point, présentent une zone que l'on peut prolonger à l'infini et qui est limitée par deux lignes brisées : concaves l'une vers l'autre si S est $< \pi$, convexes si S est $> \pi$. Or, l'impossibilité démontrée du second cas oblige à rejeter le premier où les lignes, comme deux arcs de cercle inclinés l'un vers l'autre, doivent nécessairement se couper. Il ne semble pas nécessaire d'examiner et d'apprécier longuement pareil raisonnement où il n'y a pas l'ombre de démonstration rigoureuse. Disons en outre que des lignes qui tournent leur concavité l'une vers l'autre ne s'approchent que suivant la conception reçue dans la Géométrie Usuelle, alors qu'avec l'hypothèse $S < \pi$, rien n'empêche d'admettre qu'elles se prolongent en gardant une distance.

Bertrand et Legendre, à son exemple, ont voulu comparer des aires infinies comprises dans des angles, entre des perpendiculaires. Avant de faire des démonstrations de ce genre, on devrait préciser la notion de grandeur; on ne peut la comprendre en Géo-

métrie que par la mesure, et il faudrait dire d'abord à quel signe on distingue le plus grand du plus petit. Par exemple, une aire limitée par une ligne courbe est dite plus grande que le polygone qui y est entièrement compris; plus petite, quand au contraire toute l'aire est enfermée dans le polygone — même lorsque le moyen de mesurer cette aire n'est pas encore connu. S'il s'agit d'aires illimitées, ici, comme partout en mathématiques, il faut prendre pour le rapport de deux nombres infiniment grands, la limite vers laquelle tend ce rapport lorsque le numérateur et le dénominateur de la fraction croissent sans cesse. En outre, il faut entendre par grandeur géométrique, celle que l'on peut au moins déterminer approximativement, à en juger par des indices d'inégalité. Sous ce rapport, la preuve de Bertrand, comme toutes celles de ce genre, est loin de satisfaire à nos exigences, parce que nous n'y voyons même pas le moyen de mesurer les aires, sans compter que ces aires doivent être préalablement limitées et doivent, par le recul de leurs limites, croître à l'infini.

Soit à comparer (fig. 2) l'aire X, à l'ouverture de l'angle DCE, et l'aire Y qui s'étend à partir de la ligne $AC = a$ entre deux perpendiculaires AB, CD menées sur AC. Le rapport des deux aires X, Y variera, bien qu'elles croissent à l'infini, suivant la façon dont nous serons convenus de les limiter au début. Supposons, par exemple, que, dans tout triangle, la somme des angles $S = \pi$. Faisons $AB = CD = na$, où n est entier; ensuite, menons la droite DB et limitons l'aire à l'ouverture de l'angle DCE par un arc de cercle, décrit du centre C avec un rayon $CD = na$. Nous obtenons

$$Y = na^2, \qquad X = \frac{1}{4}\pi n^2 a^2;$$

d'où

$$\frac{Y}{X} = \frac{4}{\pi n},$$

rapport qui, avec l'accroissement des aires X et Y, pour $n = \infty$, disparaît, comme Bertrand le disait. Si, au lieu de supposer $AB = na$, nous faisons $AB = n.CD = n^2a$, et si nous laissons CD comme précédemment, nous trouvons cette fois le rapport

$$\frac{Y}{X} = \frac{4}{\pi},$$

constant pour toute valeur de n et par suite aussi pour $n = \infty$, quand les deux aires sont infiniment grandes. Ainsi le rapport Y : X est chaque fois différent suivant la façon dont nous les limitons d'abord et dont elles croissent ensuite à l'infini.

Limitons maintenant les aires X, Y par l'arc FDE tracé du centre C avec le rayon $CD = na$. En supposant que, dans tout triangle, la somme des angles S est $> \pi$ ou $S = \pi$, il n'est pas difficile de voir que le rapport Y : X devient 0 pour $n = \infty$. Cela signifie que, dans les deux cas, Y devient un infiniment grand du premier ordre, X un infiniment grand du second ordre, pour raisonner comme Bertrand. Par contre, en supposant $S < \pi$, nous trouvons le rapport (*)

$$\frac{Y}{X} = \frac{2(e^{na} + e^{-na}) \arcsin\left(\frac{e^{2a} - 1}{e^{2a} + 1} \cdot \frac{e^{2na} + 1}{e^{2na} - 1}\right) - 4 \arcsin\left(\frac{e^{a} - e^{-a}}{e^{na} - e^{-na}}\right)}{\pi(e^{na} + e^{-na} - 2)},$$

(*) Si nous entendons par e la base des logarithmes népériens et si nous laissons indéterminée la droite prise pour unité, en posant

$$\sin r' = \frac{2}{e^{r} + e^{-r}}, \quad \operatorname{tg} r' = \frac{2}{e^{r} - e^{-r}}, \quad \sin \psi = \operatorname{tg} r' \cot x', \quad \operatorname{tg} x' = \frac{2}{e^{x} - e^{-x}},$$

nous trouvons pour l'aire déterminée dans le cercle par les perpendiculaires sur le rayon r, élevées au centre et à la distance X du centre (*Géométrie Imaginaire*),

$$\frac{1}{\sin r'} \operatorname{arc\,cot}(\sin r' \cot \psi) - \psi.$$

où le nombre $e > 1$ ne dépend pas de n, et par conséquent, pour $n = \infty$,

$$\frac{Y}{X} = \frac{2}{\pi} \operatorname{arc\,sin}\left(\frac{e^{2\alpha} - 1}{e^{2\alpha} + 1}\right);$$

cette quantité ne sera pas nulle tant que a restera $> o$ et ne pourra être négligée que pour une grandeur excessivement petite de a.

D'un autre côté, il n'est pas difficile de se convaincre que le rapport Y : X ne doit pas être tenu pour nul pour $X = \infty$, si l'on admet l'hypothèse $S < \pi$. Soient AB, CD perpendiculaires sur AC (fig. 3); prenons à volonté $AB = CD$. Dans l'hypothèse $S < \pi$, les angles ABD, CDB sont aigus, les perpendiculaires BB″, DD″ sur BD s'inclinent à l'intérieur de la surface plane B′BDD′ sans se rencontrer l'une l'autre, et elles forment avec BB′, DD′ les angles B′BB″, D′DD″ dont les surfaces infinies sont moindres que la surface infinie B′ACD′, contrairement à ce que Bertrand voulait affirmer de tous les angles sans exception.

Bertrand donne une autre forme à sa démonstration en considérant des surfaces infinies comprises dans des angles. Dans le triangle ABC (fig. 4), appelons A, B, C les angles opposés aux côtés a, b, c que nous prolongeons : AC au delà de A jusqu'en A″, AB au delà de B jusqu'en B″, BC au delà de C jusqu'en C′. Entre les côtés des angles extérieurs $\pi - A$, $\pi - B$, $\pi - C$, les aires $X + x$, $Y + y$, Z, s'étendant sans limite, constituent le plan qui se répartit autour du point C de tous les côtés, à l'exception de l'aire ABC que l'on peut négliger à cause de sa petitesse; donc $\pi - A + \pi - B + \pi - C = 2\pi$, d'où $A + B + C = \pi$.

Examinons ce raisonnement en limitant d'abord les plans par des arcs de cercle de rayon $CC' = r$ en prenant les points A, B, C pour centres. La circonférence autour de C peut couper les côtés de l'angle $\pi - A$, en A′, B′ de façon à partager la surface

entre les côtés de $\pi - A$ en deux parties : l'une X à l'intérieur, l'autre x à l'extérieur du cercle dont C est le centre. Les côtés de l'angle $\pi - B$ peuvent être coupés par le même cercle en B', C' de façon à partager la surface entre les côtés de $\pi - B$ en deux parties, Y à l'intérieur et y à l'extérieur du cercle, mais la partie z du cercle n'appartiendra pas à l'angle $\pi - B$. On a ainsi tous les cas que peut présenter la figure en supposant $r > a, r > b, r > c, a > c$. En désignant par Δ l'aire du triangle ABC, par R la surface du cercle ayant r pour rayon, nous obtenons

$$\frac{R}{2\pi}(\pi - A) = X + x, \quad \frac{R}{2\pi}(\pi - B) = Y + y, \quad \frac{R}{2\pi}(\pi - C) = Z,$$

$$R = X + Y + Z + z + \Delta.$$

De là, nous tirons

$$(1) \qquad A + B + C = \pi + \frac{2\pi}{R}(\Delta - x - y + z).$$

Il resterait à montrer maintenant qu'on a $\Delta = x + y - z$ dans l'hypothèse où la somme des angles du triangle S est $< \pi$ pour toute valeur de r ou au moins pour $r = \infty$. Mais on ferait en vain ce travail. Au contraire, avec la condition $S < \pi$, nous trouvons constamment $\Delta < x + y - z$, comme nous allons le voir. Lorsque $CC' = r$ croît, les points B', B'', B''' s'éloignent du point B dans la direction AB et les lignes CB', CB'', CB''' se rapprochent d'une certaine limite CD (fig. 5) que, dans la nouvelle théorie, j'ai appelée une *parallèle* à AB et qui fait avec CD, CB les angles

$$ACD = \pi - A - \alpha, \qquad BCD = B - \beta,$$

α et β étant des nombres positifs quelconques. On peut toujours prendre pour $CB' = r$ une ligne assez grande pour que les angles B'CD, B''CD, B'''CD deviennent aussi petits que l'on

veut. Alors, en appelant P la surface du triangle ACB′, nous obtenons pour r très grand (fig. 4), sans différence appréciable,

$$\frac{1}{2\pi}(\pi - A - \alpha)\,R = \frac{1}{2\pi}(\pi - A)\,R + P - x;$$

d'où

$$x = P + \frac{1}{2\pi}\alpha R. \tag{2}$$

Si, pour un instant, nous supposons l'angle C′CD = M (fig. 5), l'équation donnée plus haut,

$$(\pi - B)\,R = 2\pi\,(Y + y),$$

peut maintenant être écrite

$$\frac{1}{2\pi}(\pi - B)\,R = \frac{1}{2\pi}MR + P - \Delta + y - z. \tag{3}$$

En faisant

$$M = A + C + \alpha,$$

nous obtenons une équation qui, combinée avec l'équation (2), donne de nouveau l'équation (1) et de cette façon la vérifie. Mais si nous prenons

$$M = \pi - B + \beta,$$

nous tirons de l'équation (3)

$$-\beta = \frac{2\pi}{R}(\Delta - P - y + z),$$

ce qui, combiné avec les équations (1) et (2), donne

$$A + B + C = \pi - \alpha + \beta.$$

Ainsi, dans la démonstration de Bertrand, on avait présupposé $\alpha = 0$, $\beta = 0$, ce qu'il fallait précisément démontrer.

De même que Bertrand s'était contenté de comparer des surfaces infinies dans les angles d'un triangle, Legendre voulut se

tirer d'embarras par des *biangles*, surfaces infinies entre deux perpendiculaires. Il ne prouva proprement que ceci : Une surface infinie CABD (fig. 6), comprise entre les perpendiculaires AC, BD sur AB, est égale à une surface infinie DEFC qui provient de la première en y détachant le quadrilatère ABEF par la perpendiculaire EF sur BD. Cela même est clair en soi; mais Legendre a encore perdu de vue ici que EF peut ne pas couper AC. Pour éviter cette petite difficulté, il suffit de considérer EF comme étant la perpendiculaire abaissée de F sur BD; mais ensuite, comment tirera-t-on de là FE = AB et l'angle EFC = $\frac{1}{2}\pi$? On ne peut corriger ce faux raisonnement, et l'imprévoyance de Legendre a été si grande que, sans remarquer sa grosse faute, il a jugé sa démonstration très simple et parfaitement rigoureuse.

On a encore songé à prendre pour principe dans la théorie des parallèles que les angles des triangles doivent dépendre des rapports des côtés. A première vue, cette proposition semble aussi simple que nécessaire; mais quand nous voulons rechercher les idées où elle prend naissance, nous devons la qualifier d'aussi arbitraire que toutes les autres auxquelles on a recouru jusqu'à présent. En réalité, dans la nature, nous ne connaissons que le mouvement : c'est lui qui rend possibles les perceptions des sens. Tous les autres concepts, par exemple ceux de la Géométrie, sont produits artificiellement par notre esprit et tirés des propriétés du mouvement et, pour cette raison, l'espace en lui-même, pris à part, n'existe pas pour nous. Cela étant, notre esprit ne trouve aucune contradiction à admettre que certaines forces de la nature suivent une géométrie et d'autres, leur géométrie propre. Pour éclairer cette pensée, supposons, comme beaucoup en sont persuadés, que les forces d'attraction diminuent parce qu'elles s'exercent sur une surface sphérique. Dans la

Géométrie Usuelle, on prend comme grandeur de la sphère $4\pi r^2$; la force doit alors diminuer suivant le carré de la distance. Dans la Géométrie Imaginaire, j'ai trouvé pour la surface de la sphère

$$\pi (e^r - e^{-r})^2,$$

et peut-être cette géométrie est-elle celle des forces moléculaires dont la variabilité dépend du nombre e toujours très grand. Admettons au surplus que ce ne soit qu'une pure hypothèse qu'il faudrait défendre par des raisons plus convaincantes, mais au moins ne peut-on douter que seules les forces produisent tout : mouvement, vitesse, temps, masse et même la distance et les angles. Nous ne connaissons pas dans son essence l'étroite corrélation dans laquelle tout se trouve vis-à-vis des forces. C'est pourquoi nous ne pouvons affirmer que dans les relations des grandeurs hétérogènes entre elles, il ne doit entrer que leurs rapports. Mais si l'on admet que tout dépend de ces rapports, pourquoi ne pas admettre une dépendance directe? Quelques cas sont en faveur de cette pensée : la puissance de l'attraction, par exemple, s'exprime par la masse, divisée par le carré de la distance. Pour une distance nulle, cette expression ne représente rien. Il faut partir d'une distance, grande ou petite, mais réelle, et alors seulement la force apparaît. On demande maintenant comment la distance produit cette force? comment cette corrélation entre deux objets aussi hétérogènes existe-t-elle dans la nature? Nous ne le saurons vraisemblablement jamais; mais s'il est exact que les forces dépendent de la distance, pourquoi les lignes ne dépendraient-elles pas des angles? Du moins, l'hétérogénéité n'est pas plus grande dans un cas que dans l'autre; ce n'est pas dans les concepts que réside la différence; elle provient seulement de ce que l'expérience nous fait connaître l'une de ces

dépendances, tandis que la défectuosité des observations nous oblige à supposer par la pensée, l'autre dépendance existant soit au delà des limites du monde visible, soit dans la sphère étroite des attractions moléculaires.

Quoi qu'il en soit, la supposition que le seul rapport des distances peut déterminer les angles, sera un cas particulier auquel nous passerons toujours en prenant des lignes infiniment petites. Les procédés de la Géométrie Usuelle conduisent toujours par conséquent à des conclusions vraies, moins générales que celles que donnerait le système général de géométrie, appelé *Géométrie Imaginaire.* La différence dans les équations de l'une et de l'autre provient de ce que l'on introduit une nouvelle *constante* dont la valeur devrait résulter des observations, mais cette valeur est, sans erreur sensible, telle que la géométrie employée par tous pour les mesures pratiques est plus que suffisante, même si cette géométrie n'est pas rigoureusement vraie. En d'autres termes, ou bien ce système est réalisé par hasard dans la nature, ou bien toutes les distances qui nous sont accessibles dans la nature sont encore infiniment petites. D'une façon générale, toute proposition que la Géométrie Imaginaire admet pour les grandeurs élémentaires, appliquée à des lignes de grande dimension, doit nécessairement conduire aux règles de la géométrie ordinaire; dans cette hypothèse, en effet, on ne garde que les premières puissances des nombres qui représentent les lignes, et par suite il n'y a que leurs rapports qui entrent partout dans les équations. Telles sont, par exemple, les propositions que les distances entre deux perpendiculaires sont partout égales, que l'extrémité d'une perpendiculaire qui se meut le long d'une droite décrit une droite, que la circonférence devient droite lorsque le rayon croît.

Parmi les propositions de ce genre, il faut citer en premier

lieu celle qui admet que les rapports entre les lignes peuvent dépendre des angles; ici au moins la simplicité de l'idée correspond à nos premières expériences; mais c'est là tout ce que l'on peut dire pour la défendre; tout autre jugement serait faux ou superficiel. Il ne faut pas s'embarrasser, dira-t-on, de ce qu'admettant un rapport direct entre les lignes et les angles, on introduit une nouvelle grandeur tout aussi arbitraire que le choix d'une unité! Nous pouvons répondre que rien n'empêche de se représenter, dans les équations, non pas le rapport des lignes à l'une de celles que l'on considère, mais leur rapport à une ligne qui puisse de quelque façon être déterminée dans la nature. Je l'ai démontré, dans la Géométrie Imaginaire, en donnant des équations où toutes les lignes sont rapportées à une seule, que les observations indiqueraient si elles étaient suffisantes. Je n'estime pas nécessaire d'examiner en détail d'autres suppositions trop artificielles ou arbitraires; une seule d'entre elles mérite encore quelque intérêt : c'est le passage du cercle à la ligne droite. La faute est évidente ici; elle consiste dans le manque de continuité; la ligne courbe, qui ne cesse de se fermer si grande qu'elle soit, doit brusquement se convertir en une droite infinie, perdant ainsi sa qualité propre. Sous ce rapport, la Géométrie Imaginaire comble beaucoup mieux la lacune. En agrandissant le cercle dont tous les rayons passent par un même point, nous arrivons enfin à une ligne dont les normales se rapprochent à l'infini sans jamais se couper. Seulement, cette propriété n'appartient pas à la droite, mais à cette courbe que j'ai appelée *cercle-limite* dans mon ouvrage sur les *Principes de la Géométrie.*

Enfin, si l'expérience doit résoudre le difficile problème du parallélisme, celle que propose Legendre d'appliquer six fois le rayon sur la circonférence, est sans doute par trop insuffisante.

Dans mes *Principes de la Géométrie*, profitant d'observations astronomiques, j'ai montré que dans un triangle dont les côtés sont à peu près égaux à la distance de la terre au soleil, la somme des angles ne peut différer de deux droits de plus de 0,0003 de seconde. Cette différence croît en proportion géométrique avec les côtés du triangle et, par suite, jusqu'à présent, la géométrie usuelle, comme je l'ai remarqué plus haut, est plus que suffisante dans les mesures de la pratique. On peut encore arriver à cette conclusion à l'aide d'hypothèses assez simples en n'employant que les éléments; mais la théorie complète exige que l'on change complètement l'ordre adopté dans l'enseignement, et qu'on ajoute la trigonométrie.

La définition même du parallélisme n'est pas le moindre défaut de la théorie des parallèles. Seulement, cela ne provient aucunement, comme le supposait Legendre, d'une imperfection dans la définition de la droite, ni même, ajouterai-je, de ces défauts qui se cachent dans les premiers concepts et que je veux ici indiquer et, autant que je le pourrai, corriger.

On commence d'habitude la Géométrie en disant que les corps ont trois dimensions, les surfaces deux, les lignes une; que le point n'en a pas. On nomme les trois dimensions longueur, largeur et hauteur, et, en réalité, l'on entend par là trois coordonnées; on n'arrive ainsi qu'à communiquer des idées prématurées par des mots auxquels la langue vulgaire prête déjà un certain sens, trop vague pour une science précise. Comment est-il possible en effet de se représenter clairement la mesure d'une longueur quand nous ne savons encore ce qu'est une ligne droite? Comment peut-on parler de largeur, de hauteur, si l'on n'a parlé d'abord des perpendiculaires et des surfaces planes et dit comment se comportent des perpendiculaires dans un ou plusieurs plans? Enfin, si le point n'a pas d'étendue,

quel objet d'étude peut-il bien nous offrir? Admettons que l'on se représente clairement la ligne droite, même sans pouvoir rendre compte du concept; mais n'y a-t-il pas lieu de se demander comment, à l'aide de la droite, on trouvera *une* dimension dans la ligne courbe, *deux* dans une surface courbe?

Il n'est pas nécessaire, à la vérité, que la longueur, la largeur et la hauteur soient perpendiculaires l'une à l'autre : il suffit de prendre des lignes ayant des directions différentes. Seulement, on rencontre, dans ce cas, des difficultés spéciales. Si vous vous astreignez à ne pas recourir à des notions qui viennent plus tard, comment, demanderai-je, exprimerez-vous la condition que les trois dimensions des corps sont fixées par trois droites situées dans des plans différents? En outre, il ne faut pas confondre la direction différente de deux segments d'une droite à partir d'une coupure, avec les deux dimensions d'une surface et, enfin, il faut définir ce qu'on entend par *direction* et par *angle*. En bref, *espace, dimension, lieu, corps, surface, ligne, point, direction, angle*, voilà des mots par lesquels on commence la Géométrie, mais auxquels ne correspondent jamais d'idées claires.

On peut cependant considérer ces objets à un autre point de vue encore. L'obscurité de l'idée provient ici — il faut le remarquer — de son abstraction; or celle-ci, dans l'application aux mesures réelles, devient superflue; elle a, par suite, été introduite inutilement dans la théorie. Les surfaces, les lignes, les points, comme la Géométrie les définit, n'existent que dans notre imagination, tandis que nous mesurons les surfaces et les lignes en recourant aux corps. Voilà pourquoi nous n'avons à parler de surfaces, de lignes et de points que comme on doit les entendre dans les mesures réelles, et nous devons nous en tenir à ces notions, immédiatement unies dans notre esprit à la représen-

tation des corps, auxquelles notre imagination s'est faite et que nous pouvons vérifier directement dans la nature, sans recourir préalablement à d'autres notions, artificielles et étrangères au sujet. Mais, au début, ces nouvelles notions impriment à la science une autre direction, qu'elle suit tant qu'on ne passe pas à l'analyse; de sorte que la méthode d'enseignement prend alors un aspect particulier. Je vais m'efforcer d'expliquer en quoi ce changement peut consister.

En Mathématiques, on emploie deux méthodes : l'*analyse* et la *synthèse*. L'analyse se distingue surtout par les équations qui servent de fondement à tout raisonnement et conduisent à toutes les conclusions. La synthèse, ou méthode de construction, exige cette représentation qui est unie immédiatement, dans notre esprit, aux premières idées. Le principal avantage de l'analyse est que l'on va toujours par un chemin direct des équations au but proposé. La synthèse n'est soumise à aucune règle générale, mais il faut nécessairement commencer par une synthèse pour trouver les équations et arriver au point où l'on peut passer à la science des nombres. Par exemple, on démontre en Géométrie que deux perpendiculaires à une droite ne se coupent pas, que des triangles sont égaux dans tous leurs éléments, si certains de leurs éléments sont égaux. On voudrait en vain examiner analytiquement des cas de ce genre, ou encore la théorie des parallèles. On n'y parviendra jamais, de même qu'on ne peut sans synthèse mesurer des plans limités par des droites, des corps limités par des plans. Il va de soi que dans la synthèse même, on doit s'aider du secours de l'analyse; mais il est incontestable que, dans les débuts de la Géométrie et de la Mécanique, l'analyse ne peut jamais être l'unique méthode. La Géométrie possédera toujours, jusqu'à un certain point, un fond proprement géométrique qu'on ne pourra abso-

lument pas lui enlever. On peut restreindre l'étendue de la synthèse, mais on ne peut la supprimer complètement. Et même, dans cet effort pour remplacer la synthèse par l'analyse, il ne faut pas trop se hâter d'admettre des fonctions quand on prévoit seulement qu'il existe une relation, sans savoir en quoi elle consistera et encore moins comment elle s'exprimera. En limitant ainsi le champ de l'analyse, nous assignons à l'autre méthode son véritable but et la place qui lui revient : c'est elle qui se trouve au début de la science, lorsqu'on part de ces principes d'où le raisonnement tire tout le reste, en déduisant d'abord de nouvelles notions des premières et en étendant ensuite à l'infini dans toutes les directions les limites de nos connaissances. Les premières données seront toujours sans doute les concepts que la nature nous permet d'acquérir par l'intermédiaire de nos sens. L'esprit peut et doit les réduire à leur minimum pour qu'ils servent alors de fondement solide à la science. Seulement, d'habitude, personne n'observe toutes les règles que nous avons indiquées de la méthode synthétique ; on préfère, bien que ce soit prématuré, introduire l'analyse, et l'on suppose un développement, naturellement incomplet, des notions fondamentales que notre intelligence possède naturellement : il ne reste alors, semble-t-il, qu'à leur donner des noms, sans s'arrêter longtemps à expliquer ni à préciser les définitions. Si l'on choisit ce mode d'enseignement à cause de sa facilité et de sa simplicité, on accordera cependant qu'une science rigoureuse a bien aussi ses avantages et qu'il faut savoir en profiter à l'occasion. J'en ai fait un premier essai pour l'algèbre et je l'entreprends maintenant pour la géométrie.

L'analyse pure, sans aucun mélange de synthèse, ne peut commencer en Géométrie avant que chaque relation soit représentée par des équations et que des expressions aient été

données pour toute espèce de grandeur géométrique. On ne peut comprendre la grandeur en Géométrie que par la mesure, et celle-ci n'existe proprement pas pour les lignes et les surfaces courbes. Si petites que l'on prenne les parties d'une courbe, elles demeurent toujours courbes, par conséquent elles ne pourront jamais être mesurées à l'aide de la droite. Il faut en dire autant d'une surface courbe où, si étroitement limitées que soient les portions considérées, elles ne sont jamais planes. D'autre part, il n'existe dans la nature ni droites, ni courbes, ni plans, ni surfaces courbes : nous n'y trouvons que des corps, en sorte que tout le reste, conçu par notre imagination, n'existe que dans la théorie. Lagrange avait pris pour base la proposition d'Archimède que deux points d'une courbe, assez rapprochés, déterminent un arc plus grand que la corde, mais moindre que la somme des deux tangentes à l'arc, menées par ses extrémités jusqu'à leur point de rencontre (*Théorie des fonctions analytiques*, par Lagrange). Cette proposition est effectivement nécessaire; mais, avec elle, s'anéantit la pensée fondamentale de mesurer les courbes par des droites. Le cas est le même pour les surfaces courbes quand on veut les mesurer par des aires planes. Ainsi le calcul de la longueur d'une ligne courbe ne représente nullement la rectification de la courbure; mais il tend vers un tout autre but : chercher la limite dont la mesure effective s'approche d'autant plus qu'elle est faite plus exactement. Ainsi, l'on considère la mensuration comme faite plus exactement avec une chaîne dont les anneaux sont plus petits; comme faite le plus exactement possible enfin, quand, au lieu d'une chaîne, on prend un fil fin, parfaitement flexible. C'est pourquoi il faut spécialement prouver en Géométrie que la somme des tangentes diminue en même temps que la somme des cordes augmente jusqu'à ce que les deux sommes cessent de

différer sensiblement de la limite dont toutes deux s'approchent et que la Géométrie prend pour longueur de la courbe. Il est clair maintenant que le calcul d'après cette règle concorde d'autant plus avec la mesure que celle-ci est plus exacte. On voit également ici sur quoi repose la proposition d'Archimède. Il faut raisonner sur la grandeur des surfaces comme sur les courbes, sans affirmer que des portions très petites pourraient se planifier.

Au sens propre, il n'existe pas non plus de mesure pour les aires planes, limitées par des courbes, ni pour les solides limités par des surfaces courbes dès que l'on prend pour les mesurer dans le premier cas le carré, dans le second le cube. Seulement, comme on se propose de trouver une limite dont la mesure effective s'approche, il faut montrer que nous arrivons dans chaque cas à une limite de ce genre; il faut ensuite expliquer de quelle façon la mensuration devrait se faire et comment nous pourrions la pousser à la précision désirée. Pour satisfaire à toutes ces exigences, nous ne pouvons nous passer de propositions auxiliaires spéciales, que l'on prend pour axiomes : 1° Deux aires planes sont égales quand, pour la constitution de l'une d'elles, l'autre peut être décomposée en parties qui, réunies dans un nouvel ordre, donnent la première; 2° une surface plane est moindre que celle où elle est placée tout entière, sans la recouvrir en entier; 3° un triangle cesse d'avoir une grandeur quand l'un des côtés diminue indéfiniment. La dernière proposition est même nécessaire pour mesurer les aires planes. Il faut aussi recourir à des axiomes de ce genre pour mesurer les solides.

NOUVEAUX

PRINCIPES DE LA GEOMÉTRIE

AVEC

UNE THÉORIE COMPLÈTE DES PARALLÈLES (*)

CHAPITRE PREMIER.

LES PREMIÈRES NOTIONS EN GÉOMÉTRIE.

1. Le *contact* (**) constitue le caractère distinctif des corps; nous appelons ceux-ci corps géométriques quand nous maintenons en eux cette propriété, sans tenir compte des autres, essentielles ou accidentelles.

Outre les corps, on peut encore prendre comme objet de raisonnement, par exemple : le temps, la force, la vitesse; mais la notion comprise dans le mot contact est autre. Nous ne l'appliquons qu'aux corps seuls quand nous parlons de leur composition ou de leur division en parties. Cette idée simple, que les sens tirent directement de la nature, n'a pas son origine dans d'autres idées et ne requiert pas d'explication.

Deux corps A, B, qui se touchent l'un l'autre, constituent un corps géométrique C, dont les parties constitutives, A et B, apparaissent chacune à part, sans se perdre dans le tout C (fig. 7).

(*) Publiés pour la première fois dans les *Mémoires scientifiques de l'Université de Kazan* de 1835 (fasc. 3) à 1838 (fasc. 3).

(**) J'emploie le mot contact à défaut d'autre pour traduire le terme *prikosnovénié*. Le sens est du reste fixé par le contexte. (F. M.)

Inversement, tout corps C est partagé par une *section* arbitraire S en deux parties A, B. Nous entendons ici par le mot section non pas une propriété nouvelle du corps, mais le contact lui-même, désignant cette fois le partage du corps en deux parties qui se touchent. Nous appellerons encore les deux parties A, B, les *côtés* de la section S dans le corps C.

On peut ainsi se représenter tous les corps de la nature comme des parties d'un tout que nous appelons *espace.*

2. Tout corps A peut en toucher un autre B, de façon que le contact d'un troisième C avec A et B à la fois soit impossible (fig. 8). On nomme alors B ou bien *espace environnant,* si l'on y suppose compris un corps C quelconque; ou bien, *lieu* du corps A, si l'on ne considère que le contact de A avec B et qu'en conséquence on rejette hors de l'espace environnant toute partie C qui ne touche pas A. Quand le corps A se trouve dans ce rapport de contact avec B, et s'il est impossible qu'un corps touche A sans toucher B, on dit que A *remplit* le lieu B. Tous les autres corps qui, sans qu'on fasse aucun changement, remplissent aussi le lieu B, seront, géométriquement, *identiques* (*congruents*) entre eux sous tous les rapports.

Par contre, deux corps sont *égaux* dès que les parties de l'un peuvent, après avoir été disposées dans un nouvel ordre, remplir le lieu de l'autre.

On mesure un corps géométrique en le divisant en parties égales en même temps qu'un autre pris pour unité. La grandeur s'exprime ensuite par le rapport du nombre de parties dans le corps donné au nombre de parties du corps qui sert à mesurer. La possibilité de trouver la grandeur des corps présuppose donc la possibilité de constituer chaque corps par la répétition d'un seul qui, ajouté à lui-même, remplirait enfin tant le corps à mesurer que le corps servant à mesurer. Si l'on n'y peut complètement parvenir, on commence par donner une forme spéciale au corps servant à mesurer, ensuite on le divise en parties d'une étendue arbitraire, mais toujours identiques et de telle façon qu'il forme, lui-même et ses parties, un corps continu, remplissant

l'espace au delà de toute limite. On pourra alors composer un corps quelconque, en atteignant ce degré d'exactitude au delà duquel nos sens cessent de percevoir les différences. Les erreurs de mesure ne dépasseront pas alors les écarts qui se retrouvent même dans la nature; celle-ci doit toujours être le but principal dans les sciences et, bien que ce soit en elle que nous puisions nos premières notions, c'est à l'imperfection de nos sens que nous devons la rigueur que nous leur attribuons. En effet, il n'y a pas dans la nature de composé continu et, par suite, la régularité de la construction ne se poursuit pas jusqu'aux particules ultimes comme elle semble se présenter d'abord pour tout corps d'une certaine étendue. D'autre part, bien que nous créions dans notre imagination des corps incommensurables, comme, par exemple, la sphère et le cube, il suffit de fixer les caractères du plus grand et du plus petit, par conséquent d'admettre pour tout corps une grandeur déterminée; on doit ensuite enfermer le corps mesuré dans des limites qui peuvent s'en approcher à volonté, et on peut alors obtenir avec l'approximation désirée la grandeur du corps idéal que l'on a imaginé.

3. *Tout corps peut être divisé en parties qui ne se touchent pas au delà de l'une d'elles* (*). Nous appelons les sections correspondantes : *progressives*. Elles indiquent la dimension suivant laquelle le corps s'étend à l'infini quand nous lui ajoutons sans cesse de nouvelles parties, prises à l'espace environnant et ne se touchant pas au delà de l'une d'elles.

Dans la figure 9, on représente les parties A, B, C, D, E, qui sont unies, consécutivement dans leur ordre, par contact : mais A ne touche ni C, ni D, ni E, et de même B ne coupe ni D, ni E. Les sections S, S′, S″, S‴, qui déterminent cette division, sont progressives.

4. La première section partage le corps en deux parties; une seconde, passant d'un côté au côté opposé, le partagera en quatre parties. *On peut toujours mener deux sections de ce genre, et en ajouter ensuite de nouvelles pour augmenter chaque fois de deux*

(*) Deux parties non successives ne se touchent pas. (Note du traducteur.)

le nombre des parties qui se touchent réciproquement l'une l'autre. Nous appelons ces sections, dont le nombre est donc illimité, *tournantes* (*).

Dans la figure 10, la section *ab* partage le corps en deux parties; les sections *cd*, *fe* en ajoutent chacune deux, en sorte qu'en tout il y a six parties, AA, BB, CC, DD, EE, FF, qui se touchent l'une l'autre. Par exemple, AA coupe non seulement BB, mais aussi CC, DD, EE, FF. Les trois sections *ab*, *cd*, *ef* sont *tournantes.*

Deux sections, dont chacune par rapport à l'autre passe d'un côté au côté opposé, sont appelées pour la brièveté du langage *sections croisées.* Par exemple, dans la figure 10, les sections *ab*, *cd* sont tracées en croix. Des quatre parties produites dans le corps par ces sections, nous appelons *parties en croix* les deux parties qui, par rapport au couple de sections, se trouvent aux côtés opposés. Dans la figure 10, AA et DD, BB et EE, CC et FF sont des parties en croix. Ici AA et DD sont situés aux côtés opposés par rapport à chacune des sections *ab* et *cd*. Remarquons que deux sections en croix partagent parfois un corps en quatre parties dont deux non consécutives ne se touchent pas. Cependant, dans ce cas, la première partie se réunit par contact à la quatrième; on ne peut donc pas confondre ici le partage avec celui qui résulte de sections progressives. La figure 11 représente la vue de côté d'un corps que les sections *abcd*, *efgh* divisent en quatre parties A, B, C, D, qui ne se touchent pas au delà de l'une d'elles. Ainsi, la première partie A s'unit à la quatrième D, et il ne faut pas tenir le partage comme produit par quatre sections progressives *ab*, *ef*, *cd*, *gh*. Le caractère qui distingue les sections progressives des sections en croix est que les premières ne passent pas d'un côté au côté opposé. Dans la figure 11, au contraire, la section *abcd* divise le corps en deux parties *ahd*, *aed*, qui représentent les deux côtés de la section *abcd;* l'autre section *efgh* passe d'un côté *aed*, à l'autre *ahd*. Si la partie D, par exemple, était écartée, ce qui romprait le

(*) Ce terme rend aussi fidèlement que possible le sens du mot russe : *obraschatelny*, employé par l'auteur. (Note du traducteur.)

contact de A avec D et de D avec C, les deux sections *ef*, *cd* deviendraient progressives. Du reste, avec deux sections en croix, on doit toujours obtenir un contact d'au moins deux parties en croix, sinon dans le corps même, du moins dans l'espace environnant, en y prenant quelque partie pour l'ajouter au corps. Ainsi, dans la figure II, le corps peut être complété par une partie prise dans l'espace environnant de manière que, dans le nouveau corps, les deux sections ne présentent pas d'interruption.

En supposant les sections continues, nous pouvons admettre deux cas : ou bien les sections *ad*, *eh* (fig. 12) donnent quatre parties A, B, C, D qui se touchent en croix deux à deux, ou bien deux seulement de ces parties, par exemple A et C, se touchent (fig. 13), tandis que deux autres B et D ne se touchent pas. Dans le premier seulement de ces deux cas, les sections *ad*, *eh* (fig. 12) sont tournantes.

5. *Tout corps peut être divisé par trois sections en huit parties qui se touchent réciproquement, de façon que les sections progressives à chacune de ces trois sections séparent toujours quatre parties qui se touchent réciproquement.* Dans ce cas, nous appelons les trois sections, *principales*. Il ne peut exister un plus grand nombre de ces sections dans les corps, bien que chacune puisse être remplacée, tant par une section tournante correspondante que par une section progressive correspondante. Aucun corps n'admet une quatrième section qui pourrait porter le nom de *principale*. En effet, nous ne sommes pas en état de partager un corps par une quatrième section, en doublant le nombre des parties qui se touchent réciproquement, de façon que le contact des seize parties se maintienne quand nous remplaçons les sections par les progressives correspondantes.

Trois sections principales *ab*, *cd*, *ef* partagent le corps en huit parties A, B, C, D, A′, B′, C′, D′ qui se touchent réciproquement. Il en serait de même si, au lieu de *cd*, par exemple, on avait pris une quelconque des progressives ou des tournantes correspondantes.

Il ne suffit pas encore que les huit parties se touchent

l'une l'autre, pour que trois sections qui divisent le corps soient principales. Il faut que les sections progressives qui correspondent à l'une de ces sections divisent chaque fois en quatre parties les parties en croix, du moins quand nous ne considérons pas des portions de parties qui ne se touchent déjà plus en croix. Imaginons maintenant que l'on mène une progressive correspondant à l'une des trois sections : il se formera entre elles quatre parties dont le mode de contact sera l'un de ceux représentés dans les figures 11, 12 et 13. Le premier cas n'indique pas si les sections *ad* et *he* sont principales ; mais, dans le cas que nous voyons à la figure 12, les sections *ad*, *eh* peuvent être principales quand la même construction se répète partout entre deux sections progressives ou au moins quand le contact en croix ne s'anéantit complètement que pour quelques-unes d'entre elles.

6. Lorsque l'on trace trois sections principales dans un corps et que l'on détermine ainsi huit parties qui se touchent réciproquement, on dit que les deux parties déterminées par la première section se touchent suivant une *surface;* que deux parties situées en croix par rapport à deux sections se touchent suivant une *ligne;* que deux parties opposées par rapport aux trois sections se touchent en un *point.*

La figure 7 montre le contact des parties A et B du corps C suivant une surface. Dans la figure 15, on voit le contact, suivant une ligne, de deux corps A, B qui peuvent être séparés d'un troisième par les sections *ab*, *cd*. Dans la figure 16, deux corps A, B se touchent l'un l'autre en un point; ils sont tirés d'un troisième par les trois sections *abc*, *dbe*, *fbg*.

Tout corps touche suivant une surface l'espace environnant. On peut considérer la section qui le sépare, soit comme une section unique, soit comme deux sections tournantes, soit enfin comme trois principales. Ainsi, deux parties d'un corps se touchent suivant une surface, une ligne ou un point.

7. Si nous parlons simplement du contact de deux corps, sans considérer par conséquent les parties de l'un qui ne tou-

chent pas l'autre, les deux corps recevront la dénomination de surface, de ligne ou de point suivant le mode de contact : par surface, par ligne ou par point.

Ainsi donc, si les corps A et B se touchent suivant une surface, en se trouvant des deux côtés de la section S, on les appellera surface S, si l'on peut rejeter de A toute partie *a* qui ne touche pas B, et de B, toute partie *b* qui ne touche pas A. La séparation de parties telles que *a*, *b* doit se faire au moyen de sections S′, S″, progressives par rapport à S, et l'opération peut se poursuivre jusqu'à ce que nous arrivions dans les deux corps à la finesse d'une feuille de papier ou aussi loin que l'imagination est en état de poursuivre la division. C'est sous cet aspect qu'on se représente d'habitude les surfaces, en imaginant des corps extrêmement minces et en faisant abstraction de toutes celles de leurs parties qu'il n'est pas nécessaire de considérer.

Soient les deux corps A et B qui se touchent linéairement; considérons-les comme des parties d'un corps, détachées au moyen des sections *ab*, *cd*; si l'on convient d'ôter de A toute partie α qui ne touche pas B, et de B toute partie β qui ne touche pas A, on pourra alors appeler *lignes* les deux corps A et B. On peut procéder à la séparation des parties α et β dans les deux corps au moyen de sections S, S′ progressives par rapport aux deux sections *ab*, *cd*, et réduire les corps à la finesse d'un cheveu ou de simples traits sur le papier, ou aller aussi loin dans cette division que l'imagination le comporte. C'est ainsi que, d'habitude, on se représente des lignes en faisant abstraction dans les corps de ce qu'il n'est pas nécessaire de considérer.

Soient deux corps A et B qui se touchent en un point; on peut donc les considérer comme des parties d'un tout, déterminées par trois sections principales *abc*, *dbe*, *fbg*; on appellera A et B des *points*, si l'on retranche de A toute partie α, β qui ne touche pas B, et de B toute partie γ qui ne touche pas A. On détache de telles parties dans les deux corps au moyen des sections S, S′, S″ progressives par rapport aux trois principales *abc*, *dbe*, *fbg*, et l'on réduit enfin le corps à la petitesse d'un grain de

sable ou jusqu'à un point *b*, tel qu'il est produit par l'*attouchement* d'une plume — d'où son nom (*).

Le contact d'un corps avec l'espace environnant détermine une surface qui *limite* le corps. Le corps lui-même constitue le *côté intérieur*, et l'espace environnant, le *côté extérieur* de la surface. Les sections du corps donnent des surfaces nommées *intérieures*, qui se distinguent par là même de la surface *extérieure* formée par le contact du corps avec l'espace environnant.

Toute ligne appartient à une quantité infinie de surfaces, produites par des sections tournantes (n° **4**). C'est ce que l'on veut exprimer en disant que les surfaces *se coupent suivant une ligne qui se trouve située* dans chacune d'elles et la divise en deux parties, les *côtés de la ligne*. L'intersection de la surface extérieure du corps avec une surface intérieure, prolongée hors du corps, donne une ligne qui *se ferme et limite* la surface intérieure, ou qui, en d'autres termes, sépare le *côté intérieur* de la ligne du côté *extérieur*, illimité, situé dans l'espace environnant.

Le point appartient à toutes les lignes sur lesquelles trois sections principales se coupent avec leurs sections tournantes. Il divise chaque ligne en deux parties qui sont appelées les deux côtés opposés du point. Si la ligne se ferme, il faut en retrancher une partie pour ne pas confondre les deux côtés réunis.

8. Pour mesurer les corps, il faut les diviser en parties égales (n° **2**). La division peut se faire au moyen de sections progressives par rapport à trois principales; les corps ont par suite trois dimensions, déterminées par les trois séries de sections progressives.

Si nous admettons que nous sommes ainsi en état de mesurer tout corps, comme ce sera prouvé dans la suite, nous pouvons mener par rapport à toute section une progressive, et ainsi laisser entre les progressives une partie dont la grandeur peut être

(*) Le mot « point », en russe, provient d'une racine qui signifie toucher. (Note du traducteur.)

diminuée à volonté relativement à la grandeur de tout le corps. D'autre part, cette réduction de la grandeur du corps ne change pas la surface déterminée par la première section. Sous ce rapport, la grandeur de la surface doit être tenue pour nulle en comparaison de la grandeur du corps.

9. Pour mesurer une surface, comme pour mesurer les corps, il faut la diviser en parties égales. La division est possible quand, à la section qui produit la surface elle-même, nous en joignons encore deux, de façon à avoir trois principales, et qu'ensuite nous traçons des progressives à ces deux sections principales ajoutées. Les deux séries de sections progressives déterminent deux dimensions, tandis que la troisième ne sépare que des parties n'appartenant pas à la surface.

Si nous admettons qu'une surface peut toujours être mesurée de cette façon, et qu'il en est de même de chacune de ses parties comprises entre deux sections progressives qui marquent une dimension, nous pouvons diminuer cette partie arbitrairement par rapport à la surface entière. Mais comme une partie de la surface constitue un côté d'une ligne, la grandeur de la ligne, à cet égard, est nulle vis-à-vis de la surface. On peut donc, en mesurant les surfaces, remplacer les sections progressives par des sections tournantes correspondantes, c'est-à-dire que l'on ne doit considérer que les lignes tracées à la surface, à quelque section qu'elles appartiennent et de quelque manière que les sections se prolongent en dehors de la surface.

10. Pour mesurer les lignes, il faut les diviser en parties que l'on détermine au moyen d'une seule série de sections progressives, menées par rapport à la troisième section principale, les deux autres étant celles où se trouve la ligne. Effectivement, les sections progressives menées par rapport aux deux dernières ne détachent que des parties n'appartenant pas à la ligne (n° **7**).

Admettons que nous puissions trouver la grandeur de toute ligne et de toute portion de ligne située entre deux points sur celle-ci ; admettons ensuite que cette portion de ligne puisse à

volonté être diminuée, et nous devrons dire que le point n'a pas de grandeur par rapport à la ligne, parce que aucune des parties ainsi déterminées n'appartient au point.

11. On peut en tout cas tenir pour nulle la grandeur du point par rapport à celle de la ligne, car toutes les lignes, si petites qu'elles soient, peuvent être diminuées sans que cela exerce la moindre influence sur la grandeur du point qui leur appartient (n° **7**).

En général, les lignes aussi bien que les points, quand ils sont unis par les sections auxquelles ils appartiennent et qui sont, évidemment, deux à deux tournantes, ne peuvent augmenter sans qu'en même temps les sections, en se remplaçant l'une l'autre, donnent naissance à de nouvelles lignes et de nouveaux points. Ainsi, dans cette sorte de jonction, la somme de deux lignes est de nouveau la grandeur de la plus grande d'entre elles, ou de la ligne même en cas d'égalité; mais la grandeur du point ne change jamais. Cette propriété des lignes et des points, de ne pas s'augmenter par la duplication, est la même parmi les grandeurs géométriques que celle du zéro parmi les nombres.

12. La position relative de deux points s'appelle *distance;* elle est déterminée par le contact de deux corps dans lesquels on admet tous les changements qui ne modifient pas les points eux-mêmes; de sorte que la distance est estimée la même quand la différence provient des parties de l'un des corps qui ne touchent pas l'autre, ou des diverses sections tournantes auxquelles appartiennent de la même manière les points.

La distance des points A et B (fig. 20) est déterminée aussi bien par le contact du corps LM avec ACB, que par le contact du corps LM avec ADEB, car la différence entre les corps en contact est constituée ou bien par des parties de l'un qui ne touchent pas l'autre, ou bien par des parties dont les surfaces extérieures présentent les sections tournantes auxquelles appartiennent les deux points.

CHAPITRE II.

DÉFINITION DE LA SPHÈRE, DE LA SURFACE SPHÉRIQUE, DE LA CIRCONFÉRENCE, DU PLAN ET DE LA LIGNE DROITE.

13. La *sphère* est un corps ayant une surface extérieure, nommée *surface sphérique*, dont tous les points sont à des distances égales (fig. 12) d'un point intérieur, le *centre* de la sphère ou de la surface sphérique. On appelle cette distance du centre aux points de la surface, *rayon* de la sphère et aussi de la surface sphérique.

Il suffit des premières notions sur les corps géométriques pour placer le centre à l'intérieur de la sphère; car nous nous représentons la surface sphérique autour d'un point comme une surface qui limite complètement une portion d'espace, partout où elle prend contact avec l'espace environnant (n° **2**).

14. *Les surfaces sphériques dont les rayons sont égaux sont identiques*, parce qu'elles coïncident dans tous leurs points quand les centres coïncident (n° **2**).

Les sphères dont les rayons sont égaux sont aussi identiques, une remplissant le lieu de l'autre (n° **2**).

Des surfaces sphériques identiques, ayant même centre, coïncident de même, quel que soit le point de l'une que l'on fait coïncider avec un point de l'autre.

Une partie de surface sphérique coïncide avec la surface elle-même, où que cette partie soit posée, dès que le centre est commun.

15. Des surfaces sphériques ayant même centre (sphères *concentriques*), mais des rayons différents ne peuvent avoir de points communs (n° **13**). Ces sphères, par suite, s'enferment l'une l'autre.

Comme les surfaces sphériques concentriques représentent, grâce à cette propriété, des sections progressives dans l'espace (n° **3**), elles servent à indiquer une dimension dans les corps, surfaces et lignes.

Sont *plus petits* les rayons qui appartiennent aux sphères concentriques, placées à l'intérieur des autres. Cela donne un premier moyen pour comparer entre elles les différentes distances.

Ainsi l'on partage nécessairement un corps en parties à l'aide de sphères concentriques.

16. *Il ne peut y avoir qu'un seul centre situé à l'intérieur de la sphère.*

Supposons deux centres *a*, *b* à l'intérieur de la surface sphérique A (fig. 21). Autour de l'un, par exemple *a*, imaginons la surface sphérique B, de rayon *ab*. Tous les points de cette surface seront également des centres de la sphère A, parce que tout point *c* de B est transporté en *b* par une rotation autour de *a*, tandis que la surface A, dans sa rotation avec B, ne cesse pas de coïncider avec elle-même (n° **14**); par suite, le point *c* doit posséder la même propriété tant en *b* qu'en son lieu précédent. Les distances de tout point *d* sur la surface A à *b*, *c* et à tous les points en général de la surface B, seraient donc égales. Il en résulterait que la surface sphérique B admettrait pour centre un point *d*, situé hors de cette surface (n° **13**).

Remarquons encore que l'on ne pourrait décomposer en parties la sphère B par des surfaces sphériques autour de *d*, et que, par suite, on ne pourrait la considérer comme un corps (n° **15**).

17. *La sphère n'est pas divisée en parties par sa surface sphérique.*

S'il en était autrement, on trouverait, parmi les parties de la sphère divisée par la surface, des parties à l'intérieur desquelles ne serait pas compris le centre (n° **16**), et qui, par conséquent, ne seraient plus subdivisées en parties à l'aide de surfaces sphériques, concentriques à la sphère (n° **15**).

18. On nomme *plan* la surface engendrée par l'intersection

de surfaces sphériques égales, dont les centres nommés *pôles* sont fixes.

Soient A, B (fig. 22) des pôles autour desquels on décrit des surfaces sphériques de même rayon AC = BC. Les points communs C, D, E appartiennent à une *circonférence*, ainsi qu'à tout le plan ; et il en est de même des autres points F, G, H communs aux surfaces sphériques tracées autour de ces pôles A, B avec n'importe quel rayon AG = BG.

Les parties de circonférence comme CD, FG sont appelées *arcs* de circonférence.

19. *Le plan, en se prolongeant à l'infini, partage l'espace en deux parties*, qui constituent les deux faces du plan, chacune ayant son pôle.

Soient A, B les pôles. Nous pouvons affirmer de tout troisième point C de l'espace qu'il appartient au plan lui-même, ou bien à l'une ou l'autre de ses faces. Si les sphères engendrées autour des centres A, B, en prenant pour rayon la distance AC des points A, C, ne se coupent pas, C se trouve en dehors du plan, du côté du pôle A. Si les sphères décrites autour de A, B avec un rayon AD, distance d'un point quelconque D au point A, passent toutes deux par D, le point D se trouve sur le plan lui-même. Enfin quand la distance AE, le point E étant pris dans l'espace, est prise pour rayon, et que les surfaces sphériques décrites autour de A, B pénètrent l'une dans l'autre, le point E se trouve du côté du pôle B.

Dans le premier cas, celui du point C, la distance AC est $<$ BC ; le second, celui du point D, se réalise quand AD = BD ; le troisième, point E, lorsque AE est $>$ BE (n° **15**). Dans le premier cas, la surface sphérique décrite autour de B avec le rayon BC donnera nécessairement un point commun avec la sphère décrite autour de A avec un rayon AC; par conséquent, elle coupe aussi la sphère décrite autour de A avec un rayon égal à BC. Le second cas n'a pas besoin d'explication. Dans le cas du point E, la surface sphérique décrite autour de A avec le rayon BE ne coupe pas la surface décrite autour de B avec ce même rayon.

Tout point de l'espace devant appartenir au plan ou se trouver de l'un ou l'autre de ses côtés, le plan lui-même peut se prolonger à l'infini, en partageant l'espace en deux parties.

20. *Un plan se recouvre lui-même soit qu'il y ait substitution de face, soit qu'il y ait rotation autour des pôles.*

Quand les pôles A, B (fig. 23) échangent leurs places, les surfaces sphériques qui les entourent passent d'un côté du plan à l'autre, et chacune recouvre celle qui lui est égale ; par conséquent, le plan, dans cette nouvelle position, se confond avec le plan dans la position précédente.

Tout point C peut être transporté en un autre point D, sur le cercle générateur, pourvu que le centre A garde sa place. Ce transport entraîne un déplacement des points dans toutes les surfaces sphériques décrites autour de A, mais les surfaces elles-mêmes se confondent dans leur ancienne et dans leur nouvelle position; il en est donc de même du plan.

21. *Par deux points de l'espace, on peut faire passer un plan.*

Prenons d'abord les deux points A, B (fig. 24), par lesquels on nous demande de faire passer le plan, pour pôles d'un plan, et soit, dans ce plan, CED l'une des circonférences qui engendrent le plan. Deux points quelconques C, D de la circonférence se trouvent à des distances égales de A et de B, et par suite, si nous prenons les points C, D pour pôles, le nouveau plan passera par les deux points donnés A, B.

22. *Nous appelons origine des cercles qui engendrent le plan, un point tel qu'il n'en peut y avoir qu'un de cette espèce dans le plan et que ses distances à tous les points de chaque circonférence sont égales.* Ce point s'appelle *centre* de chaque circonférence; les distances des points de la circonférence au centre sont les *rayons de la circonférence.*

Quand les pôles A, A′ échangent leurs places (fig. 25), tandis que le point B sur la circonférence génératrice BCB′C′ garde la sienne, on trouve sur cette circonférence un autre point B′ qui,

comme B, reste à son ancienne place. Nous appellerons les points jouissant de cette propriété, *opposés* sur la circonférence.

Pour trouver le point B′ opposé au point B, il suffit de prendre des deux côtés, à partir de B, des arcs BC, BF égaux; puis, en prenant les extrémités C, F comme pôles, on construit un plan qui passe par A, A′ (n° **21**) et coupe BCB′C′ au point B′, car en même temps que A et A′, C et F échangent aussi leurs places, tandis que le plan et la circonférence, se confondant avec eux-mêmes, gardent le point commun B′ (n° **20**). Si maintenant on prend B et B′ pour pôles, le nouveau plan, passant par A et A′, coupera le cercle BCB′C′ aux points opposés E, E′. Avec le plan du cercle, il partage l'espace en quatre parties qui se remplacent l'une l'autre, si on les fait tourner autour de E, E′, de sorte que quand A est en A′, A′ est en A, et les points communs aux deux plans restent à la même place. En d'autres termes, les parties en croix se touchent suivant une ligne EDE′ (n^{os} **4** et **7**), qu'on appelle *diamètre* du cercle BCB′C′. En faisant tourner toutes les surfaces sphériques autour de leurs centres A et A′, sans modifier leur liaison à l'intersection, nous donnons au rayon EDE′ la nouvelle position CDC′, de sorte que les anciens points E, E′, B, B′ viendront en C, C′, F, F′, et il y aura un point D qui n'aura pas changé de place. Si nous prenions maintenant E, E′ pour pôles, le plan passerait non seulement par A et A′, mais aussi par B et B′. De même si C et C′ servaient de pôles, le plan passerait par A et A′ et par les points G et G′ du cercle.

Cette remarque faite, il n'est pas difficile de voir que tous les arcs CE, C′E′, BG, B′G′ sont égaux entre eux; par conséquent, si on pose ce plan du cercle sur l'autre face, et si on pose la ligne EE′ sur CC′, CC′ doit se placer sur EE′, que E soit en C ou en C′. Nous en concluons que CD = ED = C′D = E′D. Comme nous donnons à la ligne DED′ une nouvelle position CDC′ arbitraire, D, au milieu du diamètre EE′, doit être un point unique dont les distances à tous les points de la circonférence sont égales. Il n'est pas difficile au surplus de comprendre que deux diamètres se coupent en un seul point, quand on remarque que trois plans partagent l'espace en huit parties, lesquelles, prises en croix deux

à deux, et situées de côtés opposés par rapport aux trois plans, peuvent occuper le lieu l'une de l'autre sans perdre leur liaison; par suite leur contact ne comprend qu'un point (nos **5** et **7**).

La distance du centre aux points de la circonférence se nomme *rayon* et est la moitié du diamètre.

Le diamètre partage le cercle en deux parties identiques.

Les circonférences ont les mêmes propriétés sur le plan que les surfaces sphériques dans l'espace. Par exemple, l'égalité des rayons rend les circonférences identiques; et les arcs coïncident quand le centre est commun.

24. *Une circonférence ne peut avoir qu'un seul centre sur son plan.*

On ne peut admettre qu'un point, dont les distances à tous les points de la circonférence seraient égales, soit situé sur la circonférence ou en dehors. Autrement, une surface sphérique, décrite autour de ce centre, ne pourrait diviser en parties la sphère à laquelle l'origine des cercles du plan sert de centre et dont la surface coupe le plan suivant le cercle donné (n° **15**). Si, outre l'origine A, nous admettons un autre centre B à l'intérieur du cercle (fig. 26), la surface sphérique décrite autour de A avec un rayon AB coupera le plan suivant un cercle BC (n° **23**), et le point B peut être transporté partout sur la sphère de rayon AB, de même qu'un point D du cercle générateur DE change de place avec tout autre de la surface sphérique décrite autour de A avec le rayon AD. Les deux centres A, B seraient ainsi en même temps deux centres de la sphère qui coupe le plan suivant le cercle donné, ce qui a été démontré impossible (n° **16**).

25. On appelle *droite* la ligne qui entre deux points se couvre elle-même dans toutes ses positions. Cette propriété appartient au diamètre du cercle.

Soit ACA′ (fig. 27) le diamètre de la circonférence ABA′B′; soit C le centre et par suite l'origine des cercles du plan qui passe par C et qui contient la circonférence ABA′B′ (nos **22** et **24**). Imaginons autour de C une surface sphérique décrite avec

le rayon AC de la circonférence. Un nouveau plan dont les pôles sont A, A′ coupera la surface sphérique suivant un cercle BDB′D′; les deux circonférences auront ainsi les points communs B, B′ opposés dans chacune (n° **20**), ensuite le diamètre BCB′ sera commun.

Les points tels que A et A′, B et B′, opposés sur un grand cercle, s'appellent *pôles opposés de la surface sphérique*, qui contient la circonférence. Tout point de la surface peut être considéré comme un pôle auquel correspond un pôle opposé. Les points A, A′ sont dits *pôles opposés* du grand cercle BDB′D′ dont le plan est engendré par l'intersection mutuelle de sphères égales autour de A, A′ et qui se trouve avec A, A′ sur cette surface sphérique.

Les points B, B′ sont donc des pôles pour la circonférence ADA′D′ qui passe par A, A′ en coupant la circonférence BDB′D′ en D et D′, pôles de ABA′B′.

Les plans des trois cercles représentent trois sections principales (n° **5**); car ils partagent la sphère correspondante en huit parties : deux de ces parties opposées en croix se touchent au point commun C (n° **22**). Par une rotation du cercle ABA′B′ autour de son diamètre AA′, les points B et B′ se meuvent sur la circonférence BDB′D′ de façon que, quand AB se trouve dans la partie ABD de la sphère, par exemple quand B vient en E, l'arc AB′ vient sur l'autre partie AB′D′ et le point B′ quelque part en E′. Dans aucune de ces nouvelles positions de la circonférence, on ne peut admettre que les points s'écartent sur le rayon AC, car le rayon doit se recouvrir lui-même quand E et E′, par suite de la rotation, ont enfin échangé leurs places, tandis que les points qui s'écarteraient d'un côté devraient nécessairement arriver dans une autre partie de la sphère.

La droite AA′ se recouvre encore dans toutes les positions lorsque ses extrémités A, A′ ont échangé leurs places, parce que ce changement n'empêche pas les circonférences de pouvoir se confondre, de même que les lignes d'intersection des plans.

Remarquons de même que les trois plans se coupent suivant des lignes droites, telles que AA′, BB′, DD′, lesquelles, étant

des diamètres, partagent les circonférences en deux moitiés identiques.

La droite, en même temps que les plans dont elle est l'intersection, se prolonge de deux côtés à l'infini, partageant chaque plan en deux parties. Placée à l'intérieur d'un corps limité de toutes parts par une surface, ou d'un plan limité par une ligne fermée, elle perce au moins en deux points la surface ou la ligne extérieure en pénétrant à l'intérieur et en en sortant ensuite.

26. *On peut prendre pour nouveaux pôles du même plan, sur la droite qui joint deux pôles, deux points situés à égale distance de l'origine des circonférences.*

Prenons pour pôles les deux points A, A′ (fig. 28), et soient, dans le plan, l'origine B et une circonférence CDC′D′, avec les points opposés C et C′, D et D′ (n° **22**) autour desquels, en décrivant des surfaces sphériques égales, nous obtiendrons deux plans dont l'intersection ABA′ est une droite (n° **25**). La droite AA′ se prolonge au delà de toute limite avec le prolongement des plans; on peut donc y prendre deux points E et E′ à des distances de l'origine arbitraires, mais égales BE, BE′, plus près ou plus loin de B que A, A′. Par une rotation de l'un des deux plans, par exemple de ECE′C′ autour de la ligne commune EE′, le point C parcourt toute la circonférence CDC′D′ dont tous les points se trouvent donc à des distances égales de E, de même que de E′; car lorsque le plan se retourne sur son autre face, A tombe en A′, comme E en E′. Les surfaces sphériques tracées autour de E, E′ avec le rayon CE doivent donc se couper suivant la circonférence CDC′D′. Il en faut dire autant de chacune des circonférences génératrices; celles-ci proviennent toutes, de même que le plan, de l'intersection de surfaces sphériques égales de centres E, E′.

27. *Des droites coïncident dès qu'elles passent par deux mêmes points.*

Jusqu'à présent, nous distinguions encore, sur les droites, le point du plan qui sert d'origine aux circonférences. Montrons que cette différence n'est maintenant plus nécessaire. Autour du

point C, pris arbitrairement sur une droite (fig. 29), imaginons une surface sphérique d'un rayon quelconque CB. La droite, en se prolongeant des deux côtés à partir du centre C, doit couper la surface au moins en deux points B et B′ (n° **25**) qui, pris pour pôles, nous fournissent un plan dont l'intersection avec la surface sphérique est la circonférence DED′E′, où D et D′, E et E′ désignent des points opposés. Enfin, les deux plans auxquels D et D′, E et E′ servent de pôles, se coupent suivant une droite qui passe comme la précédente par les trois points B, C, B′.

Soit maintenant BDB′D′ un grand cercle sur la surface sphérique qui aura pour rayon la droite que l'on vient de tracer. Si l'on suppose encore que, entre B et C, ou, en général, entre des points quelconques situés sur le rayon BC, une partie de la première droite s'en écarte, sortant du plan du cercle ou s'éloignant d'un côté du plan, alors dans l'un et l'autre cas, par une rotation de la circonférence BDB′D′ autour de son diamètre BB′, cette partie de la première droite passerait d'un côté du plan à l'autre ou d'un côté du rayon BB′ sur le côté opposé, tandis que cette droite devrait se recouvrir elle-même dans toutes ses parties (n° **25**).

Quand une droite passe par deux points A, B (fig. 30), en la prolongeant d'un côté, par exemple au delà de B, nous pouvons prendre le prolongement BA′ = BA, ensuite prendre les extrémités A, A′ pour pôles d'un plan dont l'origine des cercles serait par conséquent B. Il en résulte que la droite AA′ et toutes les autres menées entre les points A, B, doivent être les mêmes que celles qui résultent de l'intersection des plans dont les pôles se trouvent en deux points opposés d'une circonférence génératrice du premier plan. Mais ces droites coïncident, comme on l'a vu plus haut.

Ainsi, *deux droites ou bien coïncident, ou bien se coupent en un seul point.*

Les droites servent à mesurer les distances et en général toutes les autres lignes, comme nous le verrons plus tard.

La droite peut se prolonger à l'infini, une partie se posant sur la droite et entraînant le reste de la droite.

28. *On peut considérer tout point extérieur au plan comme un pôle auquel correspond un autre point du côté opposé.*

Soient A, A′ deux pôles (fig. 31), B l'origine des cercles sur le plan correspondant, CDC′D′ une des circonférences de ce plan, provenant de l'intersection des sphères égales ayant A, A′ pour centres. Prenons quelque part, en dehors du plan, un point E ; toutes les surfaces sphériques décrites autour de ce point devront couper le cercle CDC′D′, dès qu'elles y entreront, en deux points C, C′. En permutant les pôles A, A′, de façon que le point C tombe en C′, et par suite C′ en C, le point E viendra quelque part en E′, d'où les distances égales EC = EC′ = E′C = E′C′, tandis que le diamètre de la circonférence DBD′ ne change pas de place. Imaginons autour de B une surface sphérique de rayon BD = BD′, et soient, pour celle-ci, A et A′ les pôles de la circonférence DCD′C′ (n° **26**) ; en faisant tourner cette sphère autour du diamètre DBD′ ainsi que les sphères ayant E, E′ pour centres, les points communs à la première et à la dernière doivent parcourir les lignes d'intersection et se substituer l'un à l'autre. Après une demi-révolution des surfaces sphériques, chaque point situé sur la demi-circonférence DCF′D′ occupera la place correspondante F′ sur l'autre demi-circonférence DC′F′D′, comme les anciens points C, C′; mais les points extrêmes D, D′ situés sur le diamètre ne changent pas de place. On en conclut nécessairement que tous les points de la circonférence CFC′F′ et les extrémités D, D′ du diamètre appartiennent à l'intersection de sphères égales ayant E, E′ pour centres; on peut donc considérer ces points comme pôles du plan primitif du cercle DCD′C′.

29. *Tout point du plan peut être pris pour origine de circonférences.*

Joignons par la droite AB (fig. 34) le point A du plan, pris à volonté, et l'origine B des circonférences. Au moyen du rayon arbitraire AC = AC′, imaginons autour de A la surface sphérique L qui rencontrera la droite BAC en C, C′. L'intersection des surfaces sphériques égales, ayant C et C′ pour centres, engendre un plan qui partage la première surface sphérique de centre A,

suivant une circonférence DED'E'; les points E, E', communs avec le plan donné, sont opposés sur la circonférence, car une demi-révolution de la surface autour de la ligne BC fait changer mutuellement de place E et E'. Les surfaces sphériques décrites avec des rayons égaux autour de E, E' engendrent encore un plan qui coupera la surface sphérique L suivant une circonférence DCD'C', et la circonférence DED'E' aux points opposés D et D'; on s'en assure en faisant tourner la sphère L jusqu'à ce que le plan donné se recouvre lui-même sur l'autre face. D et D' seront ainsi les pôles du plan donné (n° **28**), tandis que les plans des cercles DCD'C' et DED'E' se coupent suivant la droite DAD', menée de D en D' par le point A qui doit donc être l'origine des cercles du plan donné.

30. *La section d'une surface sphérique par un plan donne une circonférence.*

Si le plan passe par le centre de la sphère, on peut prendre ce centre pour origine des circonférences qui engendrent le plan (n° **29**); et, par conséquent, la section du plan par la sphère sera l'une de ces circonférences (n° **23**).

Si le plan ne passe pas par le centre de la surface sphérique, nous pouvons prendre ce centre pour pôle du plan, avec un autre point situé de l'autre côté (n° **28**). L'intersection de la surface sphérique donnée et de la surface sphérique égale décrite autour de l'autre pôle, sera une ligne commune tant aux deux surfaces sphériques qu'à une seule d'entre elles et au plan; ce sera donc une circonférence (n° **18**).

Nous trouverons le diamètre de cette circonférence en joignant par une droite AB (fig. 33) les points A, B de la circonférence, appartenant à un plan mené par les pôles C, D du plan donné (n° **25**). Le diamètre AB et la circonférence resteront donc les mêmes quand, pour centre de la sphère, nous prendrons un point quelconque E situé sur la ligne CD ou sur le prolongement de cette droite et quand, pour rayon de la surface sphérique, nous prendrons au lieu de CA la distance AE = BE, du point E aux extrémités A, B de la ligne AB.

31. *Deux plans qui se coupent donnent une droite.*

Si les plans AB, CD (fig. 34) se coupent, la surface sphérique ayant pour centre un point E, commun aux deux plans, et décrite avec un rayon arbitraire EF = EF′, déterminera sur chacun des plans une circonférence de centre E (n° **30**). L'intersection de ces deux circonférences donne une droite (n° **25**). En augmentant le rayon EF, nous pouvons étendre la même conclusion à tous les points d'intersection des deux plans.

32. *Une droite se trouve tout entière dans un plan dès qu'elle passe par deux points du plan.*

Deux surfaces sphériques égales (fig. 35) ayant pour centres les points A, B du plan CD, se coupent suivant une circonférence qui traverse le plan donné aux deux points opposés E, E′ (n° **25**). Le plan qui a E, E′ pour pôles, doit non seulement contenir les extrémités A, B de la droite AB, mais encore couper le plan CD suivant cette ligne, car entre deux points A et B il ne peut y avoir deux droites (n° **27**).

Par conséquent, *chaque fois qu'une droite passe par le centre, elle partage la circonférence en deux parties égales.*

33. *Par trois points non en ligne droite, on peut mener un plan, et on n'en peut mener qu'un.*

Joignons un des trois points, par exemple A (fig. 36), aux deux autres B, C par des droites AB, AC, que nous pouvons prolonger à volonté. Si les lignes AB et AC sont inégales, supposons AB < AC et prenons AD = AB. Les points B, D pris comme pôles, déterminent un plan qui passe par A, puisque AB = AD. La droite BD coupe ce plan à l'origine Q des circonférences, et la surface sphérique, ayant ce point pour centre, et décrite avec un rayon BQ = QD, passe par B et D et coupe le plan suivant une circonférence EFE′F′ (n° **30**), où E, E′ sont des points opposés situés sur la droite menée de A par l'origine Q. Si nous prenons maintenant E, E′ pour pôles, le plan correspondant passera par Q et coupera la circonférence FEF′E′ en des points opposés F, F′ (n° **25**). Enfin, ces derniers points seront les pôles

du plan où se trouvent les trois points A, B, C; car BF = FD = F'B = F'D et le point C se trouvera sur le prolongement de AD.

On ne peut mener d'autre plan par A, B, C, parce que, dans ce cas, on doit considérer les deux droites BD, DA comme n'en formant qu'une dans l'intersection des deux plans (n° **31**), et par suite, supposer D et C sur le prolongement de AB.

Nous en concluons encore que *deux lignes, issues d'un point et ne constituant pas une même droite, se trouvent dans un plan déterminé.*

Nous pouvons encore remarquer que *deux plans coïncident quand trois de leurs points non situés en ligne droite sont superposés.*

Nous prolongeons le plan à l'infini, comme la ligne droite (n° **27**), en lui superposant une de ses parties et en entraînant le reste avec elle.

34. *Deux surfaces sphériques ne se rencontrent pas, ou se touchent en un seul point, ou se coupent suivant une circonférence, suivant que la somme des rayons est inférieure, égale ou supérieure à la distance des centres. Dans le dernier cas, la différence des rayons doit aussi être moindre que la distance des centres.*

Soient deux sphères, ayant A et B pour centres (fig. 37), et des rayons AC et BC qui représentent ensemble la distance AB des centres. Imaginons un plan DE qui passe par le point C sur la droite AB et dont les pôles sont à des distances égales de C. On doit admettre la possibilité de faire tourner autour du point C et de tout autre point commun aux deux sphères, s'il en existe, l'une et l'autre sphère, en prenant pour axes les diamètres CF, CG menés du point de contact C. Il doit être possible de faire exécuter ce mouvement aux deux sphères en les maintenant fixées au plan DE, aussi bien à chacune d'elles seule qu'aux deux sphères liées au plan (n° **25**). Mais comme on ne peut mener des droites différentes entre deux points G, F (n° **26**), il en résulte nécessairement que les deux sphères ne peuvent avoir que le seul point de contact C.

Laissons les centres A, B à leur place et diminuons l'un

des rayons, par exemple AC; la nouvelle sphère se trouvera à l'intérieur de la première, et par suite ne touchera ni le plan DE, ni la sphère située au delà de ce plan. Deux sphères ne se rencontrent donc jamais quand la somme des rayons est moindre que la distance des centres.

Augmentons AC, par exemple jusqu'au point H, mais en deçà de F; nous produisons une intersection des deux surfaces sphériques qui se pénètrent partiellement l'une l'autre. Tout plan mené par les centres A, B donne deux points L, L' communs aux deux surfaces sphériques; en les prenant pour pôles, nous engendrons un plan où se trouvent A, B et, par suite, la droite AB entière (n° **32**). Donc la circonférence génératrice de ce même plan, à laquelle appartient B, coupe la ligne GF quelque part en un point B', de sorte que $BL = BL' = B'L = B'L'$. Le plan ayant B et B' pour pôles, contient donc les points L et L', et il est coupé suivant la même circonférence par les deux surfaces sphériques décrites autour de A avec un rayon AH, et autour de B avec un rayon BC.

Il est facile de voir que les surfaces sphériques continuent à se couper suivant des circonférences, tant que la différence des rayons est moindre que la distance des centres. Quand cette différence devient nulle, les surfaces ne se touchent qu'en un point; enfin, quand la différence augmente, la plus petite surface est enveloppée par la plus grande et les sphères ne se rencontrent plus. Soient, en effet, A, B les centres des surfaces sphériques (fig. 38), AF et BF les deux rayons; il doit y avoir un contact en F, où le contact se produira aussi avec le plan déterminé par le pôle B et son opposé B' aux distances $BF = B'F$ de l'extrémité F sur le prolongement de la ligne BF au delà de F (n° **27**). Quand le rayon AF augmentera, la sphère qui était à l'intérieur de l'autre comprendra des parties qui ne se touchent pas l'une l'autre directement et qui, par conséquent, empêchent la rencontre des surfaces sphériques ayant A, B pour centres.

35. Tout ce qui a été dit jusqu'à présent des surfaces sphériques et des plans s'applique aux circonférences et aux lignes

droites, car un plan mené par les centres coupe les surfaces sphériques suivant des circonférences, les plans suivant des droites, et les circonférences en des points. On peut donc se représenter la ligne droite comme la section de circonférences égales autour de deux points — *les pôles de la droite.* Tout point du plan peut être choisi comme pôle, et un pôle *opposé* lui correspond de l'autre côté de la droite.

Deux circonférences d'un plan ou bien ne se rencontrent pas, ou bien se touchent en un seul point, ou bien se coupent en deux points, suivant que la somme des rayons est inférieure, égale ou supérieure à la distance des centres. Dans le dernier cas, on suppose en outre que la différence des rayons est moindre que la distance des centres.

36. Une aire plane limitée par une ligne fermée se nomme en général *figure*, et la ligne qui la limite est appelée *contour.*

Le mot cercle désigne tantôt l'aire plane, tantôt la ligne, comme on l'a entendu jusqu'ici. Pour ne pas confondre les deux choses, on dit souvent le contour du cercle, en l'opposant à l'aire du cercle.

On appelle *polygone rectiligne*, une figure dont le contour se compose de droites ; les lignes droites en sont les *côtés.* Les polygones sont, d'après le nombre des côtés, le *triangle*, le *quadrilatère*, etc.

On appelle *segment de cercle*, la figure formée par un arc et sa *corde;* on appelle *secteur circulaire,* la figure déterminée par deux rayons et l'arc.

Les arcs de grands cercles sur la surface sphérique forment un *polygone sphérique*, quand ils limitent une partie de la surface. Ces polygones sont, d'après le nombre des arcs ou *côtés*, des *triangles*, des *quadrilatères*, etc., comme les rectilignes. On donne au polygone sphérique à deux côtés le nom de *fuseau sphérique ;* et l'on entend par *segment* la partie de la surface sphérique qui est limitée par une circonférence.

On appelle *segment de sphère* la portion de sphère détachée par un plan et qui est limitée par le segment de la surface sphérique et le plan du cercle.

Nous appellerons *sommets* les points où se rencontrent les côtés des polygones, rectilignes ou sphériques.

Il faut encore noter les expressions de triangles *isoscèles* et *équilatéraux* quand deux ou les trois côtés sont égaux. On donne un nom spécial (*jambes*), en russe, aux deux côtés égaux ; on nomme l'autre la *base*, et l'on appelle plus spécialement *sommet*, le sommet opposé.

On désigne les triangles par les lettres placées près de leurs sommets et par le signe Δ placé devant celles-ci.

CHAPITRE III.

MESURE DES DROITES, DES ANGLES RECTILIGNES ET DES DIÈDRES.

37. Avant de parler de la grandeur des droites, rappelons d'abord (n° **2**) qu'en géométrie, *mesurer* signifie remplir la chose mesurée au moyen de l'unité de mesure et de ses parties. Lorsqu'on ne peut mesurer avec rigueur, *il faut que les parties de l'unité puissent être diminuées à volonté; en outre, il est permis de considérer le reste de l'objet à mesurer comme moindre que la partie qui le contient entièrement et, pour cette raison, de le négliger.* Sans cela, il ne serait pas possible en géométrie de tout mesurer, et de trouver ainsi la grandeur de l'objet proposé.

38. La grandeur des droites se détermine par comparaison avec une droite prise pour unité. Elle s'exprime par une fraction dont le dénominateur indique de quelles parties il s'agit, et le numérateur, le nombre de parties prises dans l'unité de mesure. On appelle cette fraction le *rapport* des deux lignes, de la ligne mesurée à l'unité.

Si nous supposons que la grandeur de la ligne a, relativement à une autre b, s'exprime par le rapport de deux nombres entiers n, m, en prenant m fois a, nous obtiendrons en même temps n fois b. On voit par là sur quoi peut se fonder la recherche des nombres n, m. Il faut répéter a en ligne droite assez de fois pour que b vienne s'y placer un certain nombre de fois sans reste. Les nombres de fois qu'il faudra répéter a et b seront m et n.

Mais il peut arriver qu'on ait beau répéter a, qu'on n'obtienne jamais de multiple exact de la ligne b; on est même en droit de penser que, dans certains cas, il en doit être ainsi indéfiniment. D'autre part, il est aussi impossible qu'inutile de compter des portions d'une ligne qui échappent à nos sens. Il faut donc dire

aussi, en choisissant l'unité, quelles fractions on en peut négliger pour leur petitesse. Prenons, par exemple, b pour unité et admettons que l'on puisse négliger les parties inférieures aux m^{es} de b. On prend alors une ligne m fois plus grande que a, on y pose b le plus de fois possible; si, après l'avoir posée n fois, on obtient un reste inférieur à b, en négligeant ce reste, nous aurons $\frac{n}{m}$ pour le rapport des deux lignes a et b.

D'ailleurs, il dépend de notre arbitraire de fixer la fraction de ligne négligeable et, par suite, de pousser la *précision de la mesure et la précision des calculs* au degré que nous voulons; du moins, dans les limites que nous impose l'insuffisance de nos sens et que l'art peut reculer par l'incessant perfectionnement de ses moyens.

La constitution d'une ligne par répétition d'une autre peut parfois présenter des inconvénients dans la pratique. Dans ce cas, il suffit de poser la plus petite sur la plus grande, ensuite le reste sur la plus petite, le nouveau reste sur le premier et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de reste, ou que l'on arrive à un reste excessivement petit qu'on pourrait négliger. Supposons maintenant que le rapport de la petite ligne à la grande soit une fraction avec un numérateur n et un dénominateur $m > n$, m et n étant entiers; nous obtenons, dans les opérations précédentes, pour les nombres indiquant combien de fois une ligne est contenue dans la suivante, précisément les nombres qu'on trouve comme quotients lorsqu'on divise m par n et ensuite chaque diviseur par le reste de la division correspondante : si donc on désigne ces nombres par p, p', p'', ..., on aura

$$\frac{n}{m} = \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{p' + \cfrac{1}{p'' + \cdots}}}.$$

Si maintenant on désigne par Z et Z′ les dénominateurs des deux dernières réduites de $\frac{n}{m}$, la valeur de la différence entre la fraction continue et le rapport $\frac{n}{m}$ sera moindre que la fraction $\frac{1}{ZZ'}$.

Même lorsque cette différence ne devient pas nulle, parce que la mesure laisse toujours un reste, nous pouvons cependant la rendre d'autant plus petite que nous prolongeons davantage la fraction continue ; chaque nouvelle mesure effectuée au moyen du reste introduit un nouveau dénominateur.

Remarquons seulement que la précision de la mesure résulte de son exactitude et de sa justesse. Plus on la porte loin, plus elle est exacte ; mais, d'autre part, plus on répète des erreurs inévitables, plus sa justesse diminue. On doit juger à ces deux points de vue tout moyen qui sert à mesurer dans la pratique. La préférence à accorder à un procédé doit donc dépendre du degré auquel il compense la faiblesse de nos sens, et de la quantité d'erreurs qu'il entraîne. Mais quelque moyen que l'on imagine, il est des limites que la précision ne franchit jamais. En théorie, on admet cette limite comme nécessaire, mais en même temps comme indéterminée et arbitraire, et c'est pour cette raison que, d'accord avec les mesures réelles, on donne toute grandeur géométrique par un rapport de deux nombres entiers ; mais il faut au préalable connaître un procédé pour mesurer.

39. Des arcs coïncident partout avec leur circonférence (n° **22**), des portions de surface sphérique avec cette surface (n° **14**). Cette propriété des arcs par rapport à leurs circonférences, des portions de surfaces sphériques par rapport aux surfaces sphériques, la même que celle des lignes droites l'une par rapport à l'autre, conduit au même moyen de mesure.

On peut prendre comme unité un arc quelconque de la circonférence, et de même une portion quelconque de la surface sphérique.

Pour laisser ce choix arbitraire, nous désignons par π la moitié de la circonférence quand il s'agira de mesurer des arcs, et la moitié de la surface sphérique quand il s'agira de mesurer des portions de surface sphérique. On donne à π parfois la valeur 200, mais plus souvent la valeur 180, d'après la nouvelle division *décimale* ou d'après l'ancienne division *sexagésimale.*

On appelle alors *degré*, l'unité d'arc ou de fuseau sphérique; on divise le degré, suivant l'ancienne habitude, en 60 *minutes* et la minute en 60 *secondes*, ou bien, d'après l'usage nouveau, en 100 minutes et la minute en 100 secondes. Dans le dernier cas, les arcs s'expriment en fractions décimales. Seulement cet avantage, spécial au calcul, n'est pas assez grand pour qu'on doive lui sacrifier la commodité de l'ancienne division. Par π on entend parfois un nombre qu'on ne peut trouver qu'approximativement et qui diffère très peu de la fraction $\frac{355}{113}$.

La grandeur d'un arc ou d'une portion de surface sphérique, exprimée en degrés ou fractions de degré, ou même en général par rapport à la circonférence ou à la sphère, se nomme *angle;* l'angle est *droit* quand il vaut $\frac{1}{2}\pi$, *aigu* quand il est $< \frac{1}{2}\pi$, *obtus* quand il est $> \frac{1}{2}\pi$ et $< \pi$.

Les angles sont dits *rectilignes* quand ils expriment la grandeur de l'arc sur la circonférence; *dièdres*, quand ils expriment la grandeur du fuseau sur la surface sphérique; des parties d'un autre genre, prises sur la surface sphérique, forment les *angles solides*. Les droites qui vont du centre aux extrémités d'un arc sont appelées les *côtés* de l'angle rectiligne correspondant; de même on appelle *faces* d'un angle dièdre ou d'un angle solide les plans qui, passant par le centre, interceptent la portion correspondante de la surface sphérique.

40. *L'angle rectiligne ne dépend pas de la grandeur du rayon de la circonférence; il sert seulement à déterminer la position mutuelle de deux droites.*

On appelle *inclinaison* de l'une sur l'autre la position mutuelle de deux droites qui se rencontrent. Soient les lignes AB, AC issues d'un point A (fig. 39); prenant ce point pour centre, nous décrivons des circonférences avec les rayons $AB = AC$, $AB' = AC'$, $AB'' = AC''$. La grandeur de l'arc B'C' sur la circonférence B'C'D', dont il constitue une partie, sera l'angle rectiligne ou l'inclinaison des lignes AB sur AC et AC sur AB. Nous trouvons cet angle en portant l'arc B'C' plusieurs fois sur la circonférence B'C'D', jusqu'à ce que sa première extrémité vienne

coïncider avec l'autre. Nous saurons ainsi combien de fois il faut répéter l'arc pour obtenir une ou plusieurs circonférences, et par suite nous reconnaîtrons la grandeur même de l'arc par rapport à sa circonférence (n° **38**). En même temps qu'une extrémité C′ de l'arc coïncide avec l'autre B′, les deux côtés AB, AC, passant par les deux points A, B′, coïncident (n° **27**). La mesure de l'arc B′C′ sera donc la même que celle de tous les arcs BC, B″C″ par rapport à leurs circonférences, décrits avec un rayon AC plus grand, ou AC″ plus petit que le rayon AC′. L'augmentation du rayon, poussée aussi loin que possible, donne évidemment plus de précision, en rendant l'unité de mesure plus grande.

Si la mesure ne pouvait être rigoureuse, il faudrait aller jusqu'à un reste négligeable et qui sera tout aussi petit par rapport aux arcs des autres circonférences.

On appelle *sommet* d'un angle, le point d'où partent les côtés. On désigne l'angle rectiligne par le signe ∟ placé devant les lettres qui indiquent les côtés.

Une droite passant par le centre partage la circonférence en deux parties égales (n° **25**); par suite, deux droites qui se réunissent sur une seule, forment l'angle π.

Deux droites sont *verticales* quand elles forment un angle droit; *obliques*, quand elles forment un angle aigu ou obtus. On appelle aussi les verticales, *perpendiculaires*. Une droite qui en rencontre une autre détermine, des deux côtés, des angles que nous appellerons *adjacents* et dont la valeur totale est par conséquent π. Quand les angles adjacents sont égaux, chacun vaut $\frac{1}{2}\pi$, et les lignes sont perpendiculaires.

Dans les polygones rectilignes, on appelle *angles du polygone* les angles compris entre les côtés et dirigés vers l'intérieur. Il y en a autant que de côtés.

Le triangle qui a un angle droit est dit *rectangle*. Le côté opposé à l'angle droit se nomme *hypoténuse;* les deux autres, perpendiculaires l'un sur l'autre, s'appellent *cathètes*.

41. Le prolongement des côtés d'un angle au delà du sommet produit un angle égal au premier et qui est dit *opposé* au premier.

Car, si les droites AC, BC (fig. **40**) forment l'angle a, leurs prolongements CD, CE l'angle b, on a $a + c = \pi$, $b + c = \pi$ (n° **40**), donc a = b.

42. *L'angle dièdre ne dépend ni du rayon de la surface sphérique, ni de la position du centre sur la ligne d'intersection des deux plans;* il ne détermine que l'inclinaison d'un plan sur l'autre.

On appelle *inclinaison* de deux plans l'un sur l'autre, la position mutuelle de deux plans menés par une droite. L'angle dièdre auquel les plans donnés servent de faces, détermine cette inclinaison dès que le centre de la surface sphérique est pris quelque part sur la ligne d'intersection des plans. On se représente comment cet angle se détermine par la répétition du fuseau sur la surface sphérique; on peut donc dire ici des plans ce que l'on a dit des lignes droites pour la mesure des arcs (n° **40**); par conséquent, de même que l'angle rectiligne ne dépend pas du rayon de la circonférence, de même l'angle dièdre ne dépend pas du rayon de la surface sphérique.

Prenons maintenant sur la ligne d'intersection AB (fig. **41**) des deux plans AC, BD deux points quelconques E, F pour centres de deux surfaces sphériques, de même rayon AE = BF choisi de telle sorte que les surfaces se coupent suivant une circonférence (n° **34**). L'arc GH de cette courbe compris entre les plans AC, BD doit se recouvrir lui-même, quand les centres F, E échangent leur place (n° **20**). Les plans aussi se recouvrent alors, car ils passent par les trois mêmes points A, H, B et A, G, B (n° **33**); par suite, les deux fuseaux sphériques situés entre les plans sont égaux.

Pour désigner l'angle dièdre, nous placerons devant les lettres le même signe que pour l'angle rectiligne (n° **40**). Les expressions : *angles droits, plans perpendiculaires, angles adjacents* ou *opposés* ont ici le même sens que pour les angles rectilignes (n° **41**).

Les angles dièdres opposés sont égaux, car ils ont tous deux un même angle adjacent (comparer n° **41**).

Par *angle de deux arcs* sur la surface sphérique, nous entendrons l'angle de leurs plans (n° **30**), que ces plans passent ou non par le centre; mais il faut toujours entendre par là des arcs de grand cercle, si le contraire n'est pas exprimé.

Nous appellerons *arête* d'un angle dièdre, l'intersection de deux plans ou *faces*.

43. *Un angle dièdre est égal à l'angle rectiligne compris entre les perpendiculaires menées sur l'arête dans les deux faces.*

Sur l'arête AB (fig. 42), prenons les points A, B pour pôles; nous engendrons un plan dont une des circonférences génératrices sera, par exemple, *bcd*, de centre *a* sur la ligne AB (n° **25**). Les plans AC, BD interceptent, sur la circonférence *bcd*, l'arc *bc*, dont nous trouvons la grandeur en le répétant jusqu'à ce que la première extrémité coïncide avec l'autre ou que nous puissions négliger le reste après un grand nombre de répétitions (n° **39**). Aux répétitions de l'arc *bc* sur la circonférence *bcd* correspondront des répétitions du fuseau AcB*b*A, intercepté par les faces du dièdre sur la surface sphérique de rayon A*a* = *a*B (n° **20**); on obtiendra donc la même mesure pour l'angle dièdre A*b*Bc**A** que pour l'angle rectiligne *bac*. De plus, en faisant tourner le plan du cercle *bcd* autour de la ligne AB, on voit que ∟*ba*B = ∟*ca*B (n° **20**); en outre, le plan du cercle *bac* doit se couvrir lui-même quand les pôles A, B échangent leur place (n° **18**), et l'arc *bc* peut coïncider avec lui-même de façon que *c* vienne en *b* et *b* en *c* (n° **20**). D'où l'on conclut que ∟A*ac* = ∟*ba*B = ∟*ca*B = ∟A*ab*; par suite, que tous ces angles sont droits (n° **39**) et que la ligne AB est perpendiculaire à *ac* et à *ab*.

Nous donnons une autre forme à cette proposition en disant que, *dans un triangle sphérique, un côté est égal à l'angle opposé quand chacun des autres côtés est égal à* $\frac{1}{2}\pi$.

44. Quand un angle solide est formé sur la surface sphérique par des arcs de grand cercle, on l'obtient également par la rencontre de la sphère avec des plans menés par le centre de

la surface (n° **23**). On appelle *faces*, les plans menés par le centre de la sphère; *sommet*, le point où toutes les faces se coupent et qui est le centre de la surface sphérique; *arêtes*, les lignes d'intersection des faces. Les angles dièdres des faces sont appelés *angles du polygone sphérique;* on les prend dans l'ordre où ils se présentent sans passer à l'autre côté d'une face. Enfin, la *surface du polygone sphérique* s'étend du côté des faces où l'on compte les angles. Le contour d'un polygone sphérique correspond toujours de cette façon à deux angles solides dont la somme est 2π.

On nomme les angles solides, d'après le nombre de leurs faces, *trièdres*, *tétraèdres*, etc., et *polyèdres*, quand le nombre de faces est indéterminé. Nous emploierons, pour désigner les angles solides, le même signe que pour les angles rectilignes et dièdres (n°s **42** et **40**).

En prolongeant les faces d'un angle solide au delà du sommet, on engendre un nouvel angle solide que nous appellerons *opposé* par rapport au premier. A ces deux angles, correspondent deux polygones sphériques *symétriques*, dont les côtés et les angles se succèdent dans le même ordre, mais sont parcourus dans une direction opposée.

45. Dans les triangles rectilignes, on compte les angles du côté où le plan est limité par la figure. Ils sont dits *intérieurs;* l'angle opposé à chacun d'eux joint à l'angle qui lui est adjacent donne 2π. Le prolongement d'un côté ne peut pénétrer à l'intérieur du triangle, car il ne peut pas couper deux fois la même droite (n° **27**); par suite, un angle externe du triangle est toujours $> \pi$ tandis que l'angle intérieur est $< \pi$.

Nous appelons *angle extérieur*, l'angle compris entre un côté et le prolongement de l'autre; il est adjacent à un angle intérieur.

46. Il faut nécessairement que deux des trois côtés d'un triangle sphérique soient plus petits que π pour qu'ils puissent rencontrer le troisième sans se couper l'un l'autre. Ces deux

côtés doivent donc être situés sur une des deux moitiés dans lesquelles le grand cercle obtenu par le prolongement du troisième côté, décompose la sphère.

Nous pourrons dire de cette façon que la surface d'un triangle sphérique est inférieure à π, en entendant par là la surface comprise dans un hémisphère. Il s'ensuit que *les angles opposés à des côtés moindres que* π, *doivent aussi être moindres que* π, *tandis que le troisième angle est, en même temps que le côté opposé,* $< \pi$, $= \pi$ ou $> \pi$. En effet, si nous nous représentons comme immobile le point de rencontre des deux côtés moindres que π, le troisième croîtra avec l'angle opposé et deviendra, en même temps que celui-ci, égal à π.

CHAPITRE IV.

LIGNES ET PLANS PERPENDICULAIRES.

47. *En un point donné d'une droite, on ne peut élever qu'une perpendiculaire à cette droite.*

Il va de soi que le prolongement de la perpendiculaire au delà du point de rencontre, est perpendiculaire à la même ligne du côté opposé; cela résulte de l'égalité des angles opposés au sommet (n° **41**). Mais toute autre ligne, issue du même point que la perpendiculaire, fait d'un côté un angle aigu, de l'autre un angle obtus, et par suite ne peut être une seconde perpendiculaire.

48. *D'un point donné, on ne peut abaisser qu'une seule perpendiculaire sur une droite; toute autre droite menée de ce point rencontre la droite donnée sous un angle aigu, du côté de la perpendiculaire.*

Soit AB (fig. 43) une perpendiculaire abaissée de A sur BC; soit AC une droite menée du même point à un autre point de la ligne BC. Prolongeons AB de l'autre côté de BC, en prenant $BA' = BA$, et joignons par une droite les points A′ et C. En transportant les extrémités A, A′ à la place l'une de l'autre, le milieu B de la ligne AA′ restera immobile, de même que la ligne BC, car $\angle ABC = \angle A'BC = \frac{1}{2}\pi$ (n° **47**). Nous en concluons que $\angle ACB = \angle A'BC$, et comme l'angle ACA′ est plus petit que π (n° **49**), l'angle ACB est aigu.

Il suit de là que *deux perpendiculaires à une ligne ne peuvent se couper.*

Si, de l'autre côté du point B, nous traçons le prolongement $BC' = BC$, en faisant tourner le triangle ACA′ autour du côté AA′, le point C vient en C′, car $\angle ABC = \angle ABC' = \frac{1}{2}\pi$. Il s'ensuit que les distances AC′, AC, A′C, A′C′ sont égales; par suite

A et A′ sont des pôles de la droite CC′, et la droite qui joint deux pôles opposés d'une droite est perpendiculaire à celle-ci.

49. *Dans un triangle, on peut avoir un angle droit ou obtus, les deux autres sont alors aigus.*

Si, dans le triangle ABC (fig. 43), l'angle ABC est droit, nous venons de voir que l'angle ACB et, par suite, l'autre angle BAC doivent être aigus.

Si l'angle ABC du triangle ABC (fig. 44) est obtus, l'angle extérieur ABD, formé par le prolongement de BC au delà de B est aigu. La perpendiculaire AD, abaissée de A sur BD, rencontre quelque part en D la ligne BD en dehors du triangle (n° **48**). On forme ainsi un triangle rectangle ADC, ayant un angle droit en D et par suite un angle aigu en C. On prouve de même que l'autre angle CAB est aussi aigu.

50. *Dans un triangle isoscèle, les angles opposés aux côtés égaux sont égaux. Réciproquement, dans un triangle, aux angles égaux sont opposés des côtés égaux* (fig. 45).

[Démonstration par retournement du plan] (*).

Dans un triangle isoscèle, les angles situés à la base sont aigus, car étant égaux ils ne peuvent être ni droits ni obtus (n° **49**).

51. *Une droite qui rencontre une circonférence, ou bien la coupe en deux points, ou bien la touche en un seul point quand elle est perpendiculaire au diamètre.*

On entend parler ici d'une droite et d'une circonférence situées dans un même plan.

Si la droite entre dans le cercle, elle doit en sortir, étant suffisamment prolongée (n° **25**); elle ne peut couper la circonférence une troisième fois, parce qu'une droite fait un angle aigu avec le rayon, à l'intérieur de la circonférence (n° **50**); l'angle

(*) Pour abréger, lorsque le texte de Lobatchévsky reproduit des choses connues, nous nous contentons d'un résumé mis entre crochets. (F. M.)

obtus adjacent ne peut devenir l'angle à la base d'un autre triangle isoscèle (n° **50**).

Si la droite est perpendiculaire au diamètre, elle ne peut entrer à l'intérieur de la circonférence. On aurait, s'il en était autrement, un triangle isoscèle formé des deux rayons menés aux points d'entrée et de sortie de la droite (n° **25**), et dans ce triangle, un angle droit serait par supposition opposé à l'un des rayons, l'autre angle serait donc droit aussi (n° **50**), et nous aurions ainsi deux perpendiculaires abaissées du centre du cercle sur une même droite (n° **48**).

On peut encore le prouver d'une autre façon. Si nous prolongeons le rayon AB (fig. 45) hors de la circonférence, d'une longueur $A'B = AB$ et si, prenant A′ pour centre, nous traçons une circonférence de rayon A′B, les deux circonférences se toucheront seulement au point B (n° **35**). La droite BC dont les pôles sont en A et A′, est donc perpendiculaire à AB (n° **48**). Tout point C situé sur BC sera déterminé par la rencontre de deux circonférences égales ayant pour centres A et A′, si les rayons égaux AC, A′C croissent avec BC. Il en résulte que la perpendiculaire AB est la plus courte distance du point A à la ligne BC, tandis que les autres distances AC sont d'autant plus grandes que le point C est plus loin de l'extrémité B de la perpendiculaire AB. Si la ligne BC ne rencontre pas la circonférence perpendiculairement au rayon AC, elle la coupe nécessairement en deux points C et C′, et sort de la circonférence dès que les distances des points au centre deviennent plus grandes que AC.

52. *Dans un triangle isoscèle, la perpendiculaire abaissée du sommet sur la base, divise en parties égales l'angle du sommet et la base.*

Soit CAC′ (fig. 43) un triangle isoscèle où $AC = AC'$. Laissant les points C et C′ en place, nous rabattons le triangle de l'autre côté de la base CC′; si le sommet A tombe maintenant en A′, nous pouvons prendre A et A′ comme pôles de la ligne CC′, car les distances AC, AC′, A′C, A′C, sont égales. La droite AA′ qui joint les deux pôles, est perpendiculaire à la base

CC′ (n° **48**), et traverse les deux triangles isoscèles CAC′, CA′C′, en coupant la base quelque part en B entre C et C′, car l'angle à la base est aigu (n° **48**). Nous pouvons prendre les extrémités C et C′ de la base pour pôles de la droite AA′, les distances CA, CA′, C′A, C′A′ étant égales. En faisant tourner toute la figure autour de AA′, nous appliquons C en C′, C′ en C, et par suite CB se superpose à C′B, l'angle CAB à C′AB. Par conséquent, CB = C′B, ∟CAB = ∟ C′AB.

Remarquons à ce sujet que les sommets de tous les triangles isoscèles de base CC′ se trouvent sur la ligne AA′, perpendiculaire à la base, en son milieu, ou, ce qui revient au même, menée par les sommets de deux triangles isoscèles ayant une base commune CC′. [Cette propriété des triangles isoscèles fournit un moyen de partager en parties égales un angle ou une droite.]

De la proposition démontrée ici découlent les réciproques. Une droite qui joint le sommet d'un triangle isoscèle au milieu de la base est perpendiculaire à la base; la perpendiculaire au milieu de la base d'un triangle isoscèle divise l'angle au sommet en parties égales. Pour démontrer ces propositions, on observe qu'on ne peut abaisser qu'une perpendiculaire du sommet sur la base (n° **48**); par suite, il suffit de quelques-unes des propriétés de cette perpendiculaire, qui déterminent suffisamment sa position, pour entraîner les autres propriétés. [Il résulte de là un moyen de mener une perpendiculaire à une droite donnée, en un point donné, situé sur la droite ou extérieur.]

53. *Un angle extérieur d'un triangle est plus grand que chacun des deux angles extérieurs qui ne lui sont pas adjacents* (fig. 47). [La démonstration est celle d'Euclide.]

54. *Dans tout triangle, à un plus grand côté est opposé un plus grand angle. Inversement, à un plus grand angle est opposé un plus grand côté* (fig. 47). [Démonstration d'Euclide].

55. *Dans tout triangle, la somme de deux côtés est plus grande que le troisième.*

Un triangle ne peut être déterminé autrement que par la rencontre de deux circonférences dont les centres se trouvent aux extrémités d'un côté et qui a pour rayons les deux autres côtés. Or, les cercles ne se coupent que dans le cas où la somme des rayons est plus grande que la distance des centres (n° **35**).

Nous pouvons établir cette proposition autrement. [Démonstration d'Euclide].

En général, un côté d'un polygone est plus petit que la somme des autres, car tout polygone s'engendre graduellement, en commençant par le triangle et en remplaçant un côté par deux autres, dont la somme est plus grande.

On dit donc avec raison, dans ce sens, que *la ligne droite mesure le plus court chemin entre deux points.*

56. On appelle *perpendiculaire à un plan*, la droite qui rencontre le plan perpendiculairement à deux droites du plan. *Elle est alors perpendiculaire à toutes les droites menées dans le plan par le point de rencontre.*

Cette propriété appartient à la droite qui joint les deux pôles d'un plan. Soient A et A′ les pôles (fig. 27), BDB′D′ une circonférence génératrice du plan, ayant pour centre le point C, origine de toutes les circonférences. Quand les pôles A et A′ échangent leurs places, tout point E du cercle peut garder la sienne. On a donc : $\angle ECA = \angle ECA' = \frac{1}{2}\pi$. Par suite, toutes les lignes du plan, passant par C, seront perpendiculaires à la droite AA′.

Maintenant, supposons, inversement, que la ligne AB (fig. 48) est perpendiculaire aux deux lignes distinctes BC et BD, et prolongeons AB au delà de B, de BA′ = BA; prenons ensuite BC = BD, et joignons les extrémités C et D par des droites à A et A′; nous obtenons un ensemble de lignes où AC = AD, A′C = A′D, car ΔACA′ se superpose à ΔADA′, à cause de l'égalité des angles droits ABC, ABD et des lignes BC, BD. Une ligne de cette figure se substitue à une autre quand on permute les points A et A′, C et D; en effet, les plans des triangles ADA′, ACA′ tombent l'un sur l'autre; l'égalité de AB et de AB′ fait que le point B reste en place; par suite de l'égalité

des angles droits, la ligne BC tombe en BD et BD en BC, enfin l'égalité BC = BD amène C en D, D en C; par suite AC = AD = A'C = A'D.

Par conséquent, le plan ayant A et A' pour pôles passe par les points D et C équidistants de A et A', et par le point B, origine des circonférences du plan (n° **22**). Par les trois points B, C, D pris non en ligne droite, on ne peut mener d'autre plan (n° **33**). La ligne AA' qui joint les pôles est donc perpendiculaire à ce plan.

57. *En un point pris dans un plan, on ne peut élever qu'une seule perpendiculaire; de même, d'un point pris hors d'un plan, on ne peut abaisser qu'une seule perpendiculaire à ce plan.*

Il va de soi que le prolongement d'une perpendiculaire de l'autre côté du plan est une perpendiculaire au plan (n° **47**).

Soient maintenant deux lignes issues d'un même point et qui ne se prolongent pas l'une l'autre. Elles ne peuvent être toutes deux (n°s **47** et **48**) perpendiculaires sur la droite suivant laquelle le plan des deux premières rencontre le plan donné (n° **56**).

58. *En tout point d'un plan, on peut élever une perpendiculaire.*

Cette possibilité résulte de ce que chaque point du plan peut servir d'origine des circonférences (n° **29**), et qu'à cette origine correspondent deux pôles; la droite qui les joint passe par le point considéré et est perpendiculaire au plan (n° **56**).

S'il fallait élever la perpendiculaire en dessinant des lignes droites et des circonférences dans des plans, nommons A le plan donné, *a* le point donné dans ce plan; nous menons par ce point une ligne α dans le plan A; puis nous faisons arbitrairement passer par α un nouveau plan B, faisant un angle quelconque avec le premier A. Menons en *a* des perpendiculaires à α : l'une β dans le plan A, l'autre γ dans le plan B; enfin, traçons, dans le plan de β et γ, une perpendiculaire δ sur β au point *a* : elle sera perpendiculaire au plan donné A. En effet, α étant

perpendiculaire à β et γ, est perpendiculaire au plan de ces lignes, et elle est perpendiculaire à la ligne δ de ce plan (n° **56**); δ est donc à la fois perpendiculaire à α et β et par conséquent au plan A qui contient α et β.

59. *Un plan est perpendiculaire à un autre quand il passe par une perpendiculaire à celui-ci.*

Réciproquement, *une perpendiculaire à la ligne d'intersection de deux plans perpendiculaires, menée dans l'un des plans, est perpendiculaire à l'autre* (fig. 50).

Deux plans perpendiculaires à un troisième se coupent suivant une perpendiculaire à ce dernier. (Démonstrations connues.)

60. *D'un point quelconque, on peut abaisser une perpendiculaire sur un plan.*

On peut prendre pour pôle tout point extérieur à un plan et déterminer le pôle opposé situé de l'autre côté (n° **28**). La droite qui joint les pôles sera la perpendiculaire abaissée du point donné sur le plan (n° **56**).

Supposons que l'on demande d'abaisser une perpendiculaire en ne traçant que des droites et des circonférences dans des plans. Soit A le point donné (fig. 49), d'où la perpendiculaire doit tomber sur le plan BC. Menons arbitrairement une ligne DE sur laquelle nous abaissons, du point A, la perpendiculaire FA; puis de F, où tombe cette perpendiculaire, nous en menons une autre FG à ED, dans le plan donné; enfin, abaissons de A sur FG la perpendiculaire AG : ce sera la perpendiculaire au plan. Car DE est perpendiculaire à FG et FA, par conséquent au plan du triangle FAG; ce plan est donc perpendiculaire au plan BC (n° **59**). Les deux plans étant perpendiculaires, les lignes GA et GK le seront aussi, car GK est menée dans le plan BC perpendiculairement à FG; AG, perpendiculaire à BG et GK, est perpendiculaire à BC.

61. *Deux perpendiculaires à un plan sont comprises dans un même plan.*

Soient AB, CD (fig. 51), deux perpendiculaires au plan FE; joignons les pieds B, D par une droite BD; par cette droite, nous faisons passer un plan perpendiculaire à EF. Il doit contenir les perpendiculaires au plan EF, élevées en B et D (n° **59**); il contient donc les lignes AB, CD (n° **57**).

(Définitions de la projection ou trace d'une droite sur un plan, et de l'angle d'une oblique avec un plan.)

62. Sur la surface sphérique, un arc de grand cercle est *perpendiculaire* à un autre quand il fait des deux côtés de celui-ci des angles droits.

En un point pris sur un arc, on ne peut élever qu'un arc perpendiculaire; en effet, les arcs de grand cercle résultent de l'intersection de la surface sphérique avec des plans menés par le centre. Pour la même raison, *on ne peut abaisser qu'un arc perpendiculaire d'un point extérieur sur un arc donné.* Seulement, cet arc perpendiculaire rencontre en deux points la circonférence à laquelle appartient l'arc donné (deux grands cercles quelconques se coupent toujours en deux points). Cette rencontre a lieu aux extrémités du diamètre de la surface sphérique, et, par suite, deux arcs perpendiculaires à une circonférence ont pour somme π.

Nous mesurerons la *distance* d'un point sur la surface sphérique par l'arc de grand cercle mené à un autre point, ou mené perpendiculairement à l'arc d'un autre grand cercle. La distance du pôle aux points de sa circonférence, partout égale, est de $\frac{1}{2}\pi$, parce que le diamètre entre les pôles est perpendiculaire au plan de la circonférence (n° **56**). Tout autre point a deux distances à cette circonférence, faisant ensemble une circonférence entière; l'une est donc toujours $< \frac{1}{2}\pi$, l'autre $> \frac{1}{2}\pi$.

63. *Deux triangles isoscèles opposés situés sur une même sphère* [symétriques par rapport au centre] *sont égaux* (fig. 53). [Démonstration par superposition.]

64. *Dans tout triangle sphérique, à des côtés égaux sont*

opposés des angles égaux, et inversement, aux angles égaux sont opposés des côtés égaux.

Soient les deux triangles opposés ABC, A'B'C' (fig. 53). Supposons AB = AC; les deux triangles se superposeront exactement si nous amenons le point B en C', et C en B' (n° 63). On a donc ∟B = ∟C' = ∟C.

Si nous supposons ∟B = ∟C et, par suite, ∟B = ∟C', ∟C = ∟B', il faut superposer les triangles de façon à avoir B' en C, C en B'. A cause de l'égalité des angles dièdres, C'A' tombe sur BA, B'A' sur CA, ils se rencontrent en A', d'où il résulte que BA = C'A' = CA.

65. *Dans tout triangle isoscèle sphérique, l'arc perpendiculaire abaissé du sommet divise la base en deux parties égales.*

Soit, dans le triangle ABC, AB = AC; l'arc AD unit le sommet A au milieu D de la base BC. Si nous superposons au triangle ABC son opposé, en mettant sur BC le côté correspondant, en A et D viendront se placer les points qui leur correspondent (n° 63), tandis que l'angle ADC occupera la place de l'angle adjacent ADB. Donc ∟ADC = ∟ADB = $\frac{1}{2}\pi$.

66. *L'arc passant par les sommets de deux triangles isoscèles est perpendiculaire à leur base commune qu'il divise en parties égales*, excepté lorsque les côtés de l'un sont les prolongements des côtés de l'autre.

Soient ABC, DBC deux triangles isoscèles ayant la base commune BC, par le milieu de laquelle nous menons des arcs aux sommets A, D. Ils sont perpendiculaires à BC (n° 65), et par suite ne forment qu'un seul arc ADE (n° 62), que les sommets A et D soient ou non du même côté de la base BC. Si de plus les deux sommets et le centre de la sphère ne se trouvent pas en ligne droite, on ne peut mener un autre plan par ces trois points, ni par suite un autre arc par A, D (n° 33); donc l'arc ADE est perpendiculaire à BC. Au contraire, si les côtés égaux AB, AC sont les prolongements de A'B, A'C, les som-

mets A, A′ et le centre de la sphère seront sur une même droite; on peut donc mener une infinité d'arcs de A vers A′.

Remarquons en général que, lorsque le sommet d'un triangle isoscèle n'est pas le pôle du cercle auquel appartient la base, il ne peut y avoir qu'un arc perpendiculaire du sommet sur la base (n° **62**); la position de l'arc perpendiculaire est donc suffisamment déterminée, et deux propriétés de l'arc sur quatre — être perpendiculaire à la base, passer par le sommet, partager l'angle du sommet par moitiés, diviser la base en parties égales — entraînent nécessairement les deux autres.

Soit à diviser l'arc BC en deux parties égales. [Solution classique.]

Soit à partager l'angle BAC en deux parties égales. [Solution classique.]

Soit à abaisser une perpendiculaire du point A sur l'arc BC. [Solution classique.]

Soit à élever au point E une perpendiculaire sur l'arc BC. [Solution classique.]

Nous venons d'appeler circonférence la ligne tracée sur la surface sphérique au moyen d'un arc [compas sphérique]. Cette ligne est, en effet, la même que celle qui est engendrée par la rencontre de la surface sphérique donnée et de la surface ayant pour centre l'extrémité fixe de l'arc et la corde pour rayon. On dit que cette circonférence est *parallèle* à la grande circonférence, à laquelle l'extrémité fixe de l'arc (du compas) sert de pôle sur la sphère. Elle est également engendrée par l'intersection d'une surface sphérique par un plan perpendiculaire au diamètre qui joint les pôles.

Un grand cercle de surface sphérique possède, par rapport aux autres cercles, les mêmes propriétés que la ligne droite vis-à-vis des cercles du plan. Par exemple, les circonférences égales, décrites de deux points fixes de la surface sphérique, se coupent (ou se touchent) sur un grand cercle, auquel la plus petite et la plus grande distance de ces points sont perpendiculaires; autrement, on formerait un triangle isoscèle par le milieu de la base duquel on pourrait mener un second arc perpendiculaire (n^{os} **62** et **65**).

67. On appelle *polygone régulier*, tout polygone, rectiligne ou sphérique, qui est à la fois équiangle et équilatéral.

A l'intérieur d'un polygone régulier se trouve un point nommé *centre*, dont les distances à tous les sommets ainsi qu'à tous les côtés sont égales. Le centre d'un polygone rectiligne est donné par le point de rencontre des bissectrices des angles. Dans un polygone sphérique, les arcs, suivant lesquels les plans bissecteurs des angles coupent la sphère, convergent au centre. Dans un polygone rectiligne, par exemple, les bissectrices AC, BC (fig. 55) des angles A et B passent par le centre et forment un triangle isoscèle ABC′ qui, en s'ajoutant à lui-même, engendre le polygone régulier. Il est évident que les bissectrices des angles A et B doivent se couper, car si on les prolonge suffisamment, chacune d'elles divise la surface du polygone en deux parties identiques, qu'elles soient produites par l'une ou l'autre ligne. Il en faut dire de même des polygones réguliers sphériques. Si un polygone régulier a n côtés, chaque angle au centre aura pour mesure $\frac{2\pi}{n}$. La circonférence ayant pour rayon la distance du centre à l'extrémité d'un côté passe donc par les sommets de tous les angles; la circonférence ayant pour rayon la perpendiculaire, ou la distance du centre au milieu d'un côté, touchera chaque côté en son milieu.

CHAPITRE V.

MESURE DES ANGLES SOLIDES A L'AIDE D'ANGLES DIÈDRES.

68. *Un trièdre est égal à la moitié de la somme de ses angles dièdres moins un droit.*

Au principe adopté pour les mesures géométriques (n° **37**), nous en ajoutons un nouveau, tout aussi nécessaire, comme nous l'avons déjà fait remarquer occasionnellement plus haut (n° **2**). *Deux grandeurs sont dites égales quand nous pouvons les reproduire avec les mêmes parties, même disposées dans un autre ordre.* Il ne restera plus alors qu'à mesurer ces parties.

Soit le triangle sphérique ABC (fig. 56), où chaque côté est $< \pi$. Menons l'arc FDEG par les milieux D, E des côtés AB, BC. Soit l'arc perpendiculaire BH abaissé sur cet arc du point B; supposons qu'il tombe à l'intérieur du triangle ABC. Les arcs perpendiculaires menés sur cet arc des points A et C se trouvent alors en dehors du triangle ABC et forment les triangles AFD, CEG égaux à DBH, BEH. Nous pouvons nous en assurer en faisant tourner, par exemple, le triangle DBH autour du point D jusqu'à ce que BD se superpose à DA. A cause de l'égalité des angles opposés au sommet, le côté HD s'applique sur DF et le recouvre exactement, car l'arc DE est $< \pi$ (n° **46**) et, par conséquent, il ne peut y avoir qu'un arc perpendiculaire abaissé de A sur FD (n° **62**). En s'appuyant donc sur le principe que nous venons d'admettre, nous dirons que la grandeur du triangle ABC est égale à celle du quadrilatère AFGC. Remarquons encore que, si nous appelons S la somme des angles du triangle ABC, la somme des angles du quadrilatère AFGC sera $S + \pi$, car aux angles BAC, BCA s'ajoutent $FAD + ECF = ABC$ et $AFD + EHC = \pi$.

Si l'arc perpendiculaire abaissé de B sur DE tombe en E (fig. 57), le triangle BDE est égal au triangle AFD, par consé-

quent la surface du triangle ABC est la même que celle du quadrilatère AFEC, dont les angles ont pour somme $S + \pi$.

Si l'arc perpendiculaire CH, abaissé de C sur DE, tombe en dehors du triangle ABC (fig. 58), ici, comme dans le premier cas, les triangles AFD et DCH, BGE et ECH seront égaux, et la surface du quadrilatère AFEB est encore égale à celle du triangle ABC, auquel s'ajoute le triangle AFD, égal à la somme des deux triangles enlevés DCE, BGE. La somme des angles du quadrilatère ABGF est encore égale à $S + \pi$, car on ajoute l'angle FAD au lieu de la somme des deux angles ACB, GBC, et il faut encore compter les angles droits en F et G.

En toute hypothèse donc, la surface du triangle ABC (fig. 56) est la même que celle du quadrilatère AFGC, limité par le côté $AC < \pi$ du triangle ABC et les arcs perpendiculaires AF, CG abaissés de ses extrémités sur l'arc mené par les milieux des deux autres côtés. La somme des angles de ce quadrilatère dépassera de deux droits la somme des angles du triangle. Il en résulte que la somme des angles et la surface demeurent les mêmes dans tous les triangles ayant une même base $AC < \pi$, quand le sommet du troisième angle se trouve à la même distance de l'arc mené par le milieu des côtés de ce troisième angle.

Dans le triangle donné ABC (fig. 59), menons l'arc DE par les milieux D, E des côtés AB, BC, et menons la circonférence BF, parallèle à cet arc, jusqu'au point F où elle rencontre le côté AC, prolongé dans la même direction. L'arc perpendiculaire FG, abaissé de F sur le cercle DEG, sera égal à l'arc perpendiculaire au même arc, abaissé du point B (n° 66); par suite, la surface et la somme des angles du triangle ABC sont les mêmes que dans le triangle que nous obtenons en joignant, par des arcs, le point F aux points A et C; remarquons que le premier de ces arcs doit passer par le milieu H de l'arc KG compris entre les arcs perpendiculaires AK et FG. Ce dernier triangle se résout dans le fuseau AHFCA, puisque l'angle en C devient π. La somme des angles de ce fuseau est alors de $S - \pi$; le triangle a donc pour grandeur $\frac{1}{2}(S - \pi)$.

Soit encore S la somme des angles d'un triangle; mais nous supposons un côté plus grand qu'une demi-circonférence. En remplaçant ce côté par son complément pour faire une circonférence entière, nous obtenons avec les deux autres côtés un nouveau triangle dont les angles ont pour somme $4\pi - S$ et dont la surface $\frac{1}{2}(3\pi - S)$ doit faire π avec la surface du premier triangle. Nous avons de nouveau pour la surface du triangle donné $\frac{1}{2}(S - \pi)$.

On prouve habituellement cette proposition d'une autre manière. Soient A, B, C les angles du triangle sphérique ABC (fig. 60); nous prolongeons AB jusqu'à ce qu'il forme une circonférence entière, et les deux autres côtés au delà du point commun C jusqu'à ce qu'ils rencontrent cette circonférence. Outre le triangle donné, que nous désignerons par la lettre L, nous en avons trois autres M, N, P; la somme $L + M + N + P = \pi$. D'autre part, $L + P = C$, $L + M = A$, $L + N = B$, de sorte que $L = \frac{1}{2}(A + B + C - \pi)$. Cette démonstration a le défaut de parler de la grandeur des triangles en laissant indéterminé le moyen de la mesurer; de plus, dans l'équation $P + L = C$, il faut remplacer P par le triangle opposé.

Il résulte directement de notre proposition que les surfaces des triangles opposés sont égales. On peut aboutir à cette conclusion par une autre voie, sans considérer la grandeur même des triangles. Dans un triangle sphérique ABC (fig. 61), les arcs A'D, B'D, C'D, perpendiculaires aux milieux des côtés en A', B', C', se rencontrent en un point D, à des distances des sommets AD, BD, CD égales entre elles. En effet, si, au lieu du triangle BDA', nous prenons son opposé, en posant BA' sur A'C à partir de A', BD se superposera à CD à cause de la perpendicularité de DA' dans les deux triangles. On prouvera de même que $BD = AD$, si les deux perpendiculaires A'D, C'D se rencontrent en D. La perpendiculaire B'D (n° **65**) doit aussi passer par ce point. Le triangle donné se décompose donc en trois triangles isoscèles ADB, BDC, CDA, qui sont égaux aux triangles analogues formés dans le triangle opposé. La démonstration reste la même dans le cas où le point D est en dehors du

triangle; seulement, pour constituer le triangle, il faut retrancher un triangle de la somme des deux autres ou, au contraire, retrancher cette somme du troisième.

69. On peut composer un polygone sphérique au moyen des triangles obtenus en menant des arcs à tous les sommets à partir d'un point pris arbitrairement sur la sphère. On voit facilement, d'après cette remarque, que la grandeur du polygone dépend de la somme de ses angles.

Du point A (fig. 62), pris arbitrairement à l'intérieur du polygone, menons les arcs AB, AC, AD, AE aux extrémités des côtés a, b, c du polygone. Il peut arriver qu'un arc ainsi tracé, par exemple AD, ajoute au triangle précédent ABC un autre ACD. Ce sera le cas lorsque l'arc AD augmente l'angle en A, par l'adjonction de DAC. Il peut arriver aussi qu'un nouvel arc, par exemple AE, retranche de l'ancienne surface le triangle AED. Cela se produira quand DAE se retranchera de l'angle en A. Enfin l'arc mené au nouveau sommet peut coïncider avec l'arc précédent, comme par exemple AE avec AF : rien n'est alors ajouté ni à la surface du polygone, ni à l'angle en A. Soient maintenant n le nombre des côtés du polygone, S la somme des angles, m le nombre des triangles qu'il faut ajouter les uns aux autres, M la somme de leurs angles, p le nombre des triangles à retrancher, P la somme de leurs angles ; par conséquent, le nombre des côtés qui se confondent avec les arcs menés du point A aux sommets sera $n - m - p$. La surface des triangles qu'il faut ajouter est $\frac{1}{2}(\mathrm{M} - m\pi)$; de même, la surface des triangles à retrancher est $\frac{1}{2}(\mathrm{P} - p\pi)$; nous trouvons ainsi pour la grandeur du polygone

$$\frac{1}{2}(\mathrm{M} - \mathrm{P}) - \frac{1}{2}(m - p)\pi.$$

Quand l'angle en A croît, il s'ajoute aux angles du polygone certains angles des triangles, ce qui donne M pour tous ces triangles. Quand l'angle en A décroît, on retranche des angles du polygone certains angles des triangles, mais comme on ajoute

chaque fois 2π, on aura, dans la somme totale, $2\pi p - P$. Enfin, chaque fois qu'un arc mené de A vers un sommet coïncide avec un côté, on ajoute π aux angles du polygone, soit en tout $(n - m - p)\pi$; de plus, il faut retrancher l'angle 2π autour de A, qui n'appartient pas aux angles du polygone. La somme des angles sera donc

$$\begin{aligned} S &= M + 2p\pi - P + (n - m - p)\pi - 2\pi \\ &= M - P + (n - m + p - 2)\pi. \end{aligned}$$

En tirant de là M — P, nous obtenons la grandeur du polygone sphérique :

$$\frac{1}{2}\{S - (n - 2)\pi\}.$$

Nous aurions obtenu le même résultat si nous avions pris le point A en dehors du polygone ou sur un côté entre deux sommets ou en un sommet. Dans le second de ces cas, on a un triangle de moins, et il faut retrancher de la somme des angles des triangles l'angle π en A, puisque cet angle n'appartient pas au polygone. Les deux autres cas ne modifient pas la somme des angles des triangles; mais, quand le point est pris hors du polygone, on ne doit pas ajouter 2π aux angles en passant au dernier triangle; car, bien que l'angle en A diminue, ce triangle se trouve en entier hors du polygone. Si le point A se trouve en un sommet, il faut compter deux triangles de moins.

Il ne peut donc y avoir d'angle solide quand le nombre n *des dièdres et la somme* S *de ces angles sont tels que* $S - (n - 2)\pi$ *ne forme pas un nombre positif.*

Nous avons parlé jusqu'à présent des polygones à contour unique. Si le contour est double, on joint par une ligne l'extérieur à l'intérieur, et l'on est en droit de considérer qu'il n'y a qu'un contour, la ligne de jonction faisant l'office d'un côté par lequel on peut passer d'un contour à l'autre et inversement. Dans l'expression générale de la surface, le nombre n est remplacé par $n + 2$. Nous arrivons à la même conclusion en considérant le polygone donné comme la différence de deux autres.

Soient n' le nombre des côtés du contour extérieur, n'' le même nombre pour le contour intérieur; soient S' la somme des angles du grand polygone, S'' la somme des angles du petit polygone; par conséquent

$$n = n' + n'', \; S = S' + 2n''\pi - S''.$$

La surface du grand polygone est

$$\frac{1}{2}\{S' - (n' - 2)\pi\};$$

celle du petit polygone

$$\frac{1}{2}\{S'' - (n'' - 2)\pi\}.$$

Leur différence donne la surface du polygone à double contour

$$\frac{1}{2}\{S - n\pi\}.$$

Puisque nous parlons de la division des polygones sphériques en triangles, remarquons que la division des polygones rectilignes se fait de la même manière. Les uns et les autres peuvent même être décomposés en triangles qu'il suffit d'additionner. Prolongeons, s'il est nécessaire, le côté a d'un angle pris arbitrairement, faisons-le tourner vers le côté adjacent b jusqu'à ce que nous rencontrions un sommet à une distance c du point commun des lignes a, b. Il peut arriver que l'extrémité de b coïncide avec le premier sommet que nous rencontrons en faisant tourner a; c est alors égal à b. Une troisième ligne, joignant les extrémités de a et c, détermine un triangle à l'intérieur duquel il n'y a pas d'autres sommets ou côtés du polygone. Si a et b appartiennent à un même contour, et si la ligne c rencontre l'autre contour du polygone, en enlevant le triangle, on ne doit plus faire de distinction entre les deux contours qui n'en font ainsi plus qu'un seul. Remarquons encore que la ligne c partage toujours un polygone à un seul contour en deux parties dont

chacune a moins de côtés que le polygone donné. Donc, en continuant l'opération, nous finirons par décomposer le polygone en triangles. Supposons qu'il y en ait m et que le polygone ait n côtés; le nombre $3m$ des côtés des triangles comprendra nécessairement les n côtés du polygone qui n'entrent que dans un seul triangle, tandis que les $3m - n$ restants appartiennent chacun à deux triangles. Le polygone à contour unique se décompose ainsi en m triangles ayant $m - 1$ côtés communs. Par conséquent

$$\frac{1}{2}(3m - n) = m - 1,$$

d'où $m = n - 2$, nombre minimum des triangles dans lesquels se décompose un polygone de n côtés. Au contraire, dans un polygone à double contour, m des triangles doivent avoir m côtés communs, par conséquent $3n - m = 2m$, d'où $m = n$. Les angles de tous ces triangles, dans les deux cas, représentent les angles du polygone; et comme, dans un triangle sphérique, le double de la surface est égal à la somme des angles moins π, dans le polygone sphérique de n côtés, à simple contour, le double de la surface est égal à la somme de tous les angles moins $(n - 2)\,\pi$, comme on l'a prouvé plus haut.

70. Les faces d'un angle solide régulier coupent la surface sphérique ayant le sommet pour centre suivant un polygone régulier (n° **67**). Cet angle aura pour *axe* la ligne menée du sommet par le centre du polygone régulier. On appelle *solide régulier*, celui qui est limité par des polygones réguliers égaux, se réunissant en nombre égal en chaque sommet pour constituer des angles solides réguliers. Le *centre* d'un tel solide se trouve à des distances égales des sommets; il est à la rencontre des axes et des perpendiculaires élevées au centre de chaque face. Considérons deux faces adjacentes A, B; menons par leurs centres les perpendiculaires p, q aux plans de ces faces et les perpendiculaires a et b à l'arête commune c (n° **52**). Le plan où se trouvent a, b est perpendiculaire au milieu de c (n° **56**) et aux

faces A, B (n° **59**). Il doit également comprendre les perpendiculaires p, q élevées par les centres des faces (n° **59**); par suite il coupe la surface du solide suivant un polygone soit en rencontrant toujours des arêtes perpendiculairement en leur milieu, soit en passant tour à tour par le sommet d'une face, puis par le milieu d'une arête qu'il rencontre à angle droit. Le premier cas a lieu quand le nombre de côtés des faces est pair; le second quand il est impair. Dans le premier cas, le plan des perpendiculaires p, q, en suivant la direction des lignes a, b, rencontre toujours de la même façon les arêtes des faces, et coupe ainsi la surface du solide suivant un polygone régulier, au centre duquel doivent aboutir les droites p, q (n° **67**). Si le nombre des côtés d'une face est impair, le plan ab passe d'abord par un sommet de chacune des faces A, B; ensuite, il contient les axes des angles solides placés en ces sommets, car les projections de ces axes respectivement sur les plans A, B sont les bissectrices des angles correspondants des faces A, B, et comme elles passent par les centres de ces faces, elles sont les prolongements des droites a, b. Ensuite le plan ab entrant dans une face adjacente, passe de nouveau par le centre et est perpendiculaire au milieu d'une arête. Ainsi, le plan ab coupe la surface du solide suivant un polygone dont tous les côtés sont égaux et dans lequel les angles de rang impair sont égaux de même que les autres. La bissectrice de l'un de ces angles partage toujours le polygone en deux parties égales; de là suit que ces lignes doivent nécessairement se rencontrer en un point; pour le voir, il suffit de superposer le polygone à lui-même en faisant coïncider deux angles égaux du polygone. Cela prouvé, considérons trois côtés successifs α, β, γ de ce polygone (fig. 63). Ils doivent porter les centres des faces à des distances égales des sommets, comme nous l'avons vu plus haut. Élevons en ces centres, vers l'intérieur du polygone, des perpendiculaires sur les côtés α, β, γ. Supposons que les perpendiculaires à α et β soient celles que nous avons appelées p et q, et désignons par r la perpendiculaire au troisième côté γ. Soient n, m les bissectrices des angles $\alpha\beta$ et $\beta\gamma$. La perpendicu-

laire q s'élèvera sur le côté β du triangle qui a pour côtés β, n, m. Si q rencontre m, il rencontrera au même point la perpendiculaire r; car les centres des faces auxquelles appartiennent β et γ sont à des distances égales du point commun à β et α. De même, si q rencontre n, p passera par le même point, puisque les centres de faces situés sur α et β sont équidistants du point de rencontre de α avec β. Il est donc établi que l'on peut trouver deux faces adjacentes telles que les perpendiculaires aux centres se coupent. Quelles que soient ces deux faces, qu'elles aient une arête commune ou un seul point commun, elles appartiennent toujours à un même angle solide, et les perpendiculaires élevées en leurs centres, se trouvant chacune dans un même plan avec l'axe de cet angle solide, ne peuvent se rencontrer que sur cet axe. Et comme une face peut se substituer indifféremment à une autre, la perpendiculaire à l'une venant remplacer la perpendiculaire à l'autre, d'une façon générale toutes les perpendiculaires aux faces de cet angle solide doivent concourir en un même point. En conservant deux faces ayant une arête commune, nous pouvons passer à un autre angle solide et ainsi de suite. Nous en concluons que toutes les perpendiculaires aux centres des faces concourent en un point, qui est aussi le point de rencontre des axes ; ce point est équidistant de toutes les faces et aussi de tous les sommets du solide.

71. Nous appellerons *angle au centre à l'intérieur du solide régulier,* l'angle solide formé par les plans qui passent par le centre du solide et par les arêtes d'une même face. Il doit donc être une partie aliquote de 2π. Soit n le nombre des faces ayant chacune m arêtes. Soit r le nombre des faces composant un angle solide à la surface du corps régulier. Nous trouvons la valeur de l'angle solide au centre au moyen de ses angles dièdres (n° **69**), et nous obtenons ainsi l'équation

$$\frac{2\pi}{n} = \frac{1}{2}\left\{m.\frac{2\pi}{r} - (m-2)\pi\right\}$$

qui donne

$$n = \frac{4r}{4 - (m-2)(r-2)}.$$

Ici, m, qui représente le nombre des côtés d'une face, et n, qui désigne le nombre des faces composant un angle solide, ne peuvent être inférieurs à 3. D'autre part, n ne doit être ni négatif ni infiniment grand; par suite, ni m ni r ne doivent être plus grands que 5. En essayant entre ces limites les nombres entiers m, r, nous trouvons tous les cas :

$m = 3, r = 3, n = 4,$ le solide est un *tétraèdre;*
$m = 3, r = 4, n = 8,$ le solide est un *octaèdre;*
$m = 3, r = 5, n = 20,$ le solide est un *icosaèdre;*
$m = 4, r = 3, n = 6,$ le solide est un *cube* (hexaèdre);
$m = 5, r = 3, n = 12,$ le solide est un *dodécaèdre.*

Il n'y a donc pas plus de cinq solides réguliers, tandis qu'il y a une infinité de polygones réguliers. Dans ces derniers, le nombre des côtés est le même que celui des angles, tandis que dans les solides réguliers, sauf le tétraèdre, le nombre des faces et celui des dièdres diffèrent. Soit t le nombre des angles solides d'un de ces corps; alors le nombre nm de tous les angles dièdres compris dans les angles solides au centre doit être égal au nombre tr des angles autour des axes. Nous trouvons ainsi

$$t = \frac{4m}{4 - (m-2)(r-2)},$$

d'où le nombre des sommets : tétraèdre, 4; cube, 8; octaèdre, 6; dodécaèdre, 20; icosaèdre, 12.

72. Considérons un solide quelconque, ayant n faces, t angles solides et p arêtes. Nous admettons qu'à l'intérieur on puisse trouver un point tel que les plans menés par ce point et par les arêtes des faces ne rencontrent pas deux fois la surface du solide; les plans aboutissant à une même face formeront donc autour du point commun des angles solides dont la somme sera

égale à 2π. Soit α le nombre des faces ayant a côtés, β le nombre des faces en ayant b, γ celui des faces ayant c côtés, etc. Nous aurons

$$n = \alpha + \beta + \gamma + \ldots$$

$$2p = \alpha a + \beta b + \gamma c + \ldots$$

En remarquant que la somme des angles dièdres autour des sommets du solide est $2\pi t$, nous trouvons une autre expression pour la somme des angles solides autour du point commun situé à l'intérieur du corps (n° **69**). Nous obtenons ainsi l'équation

$$4\pi = 2\pi t - \alpha(a-2)\pi - \beta(b-2)\pi - \gamma(c-2)\pi - \ldots\ldots$$

En y substituant les valeurs de n et p, nous aurons

$$p = n + t - 2. \tag{5}$$

Les solides réguliers appartiennent au cas que nous venons d'examiner. Nous connaissons déjà pour ceux-ci le nombre des faces et celui des angles solides; la formule (5) donnera alors le nombre des arêtes : tétraèdre, 6; cube, 12; octaèdre, 12; dodécaèdre, 30; icosaèdre, 30.

La relation entre le nombre des faces d'un solide, celui des arêtes et celui des angles solides a été donnée pour la première fois par Euler dans les *Mémoires de l'Académie de Saint-Pétersbourg*, en 1758; Legendre en a donné plus tard une autre démonstration (*Éléments de géométrie*), enfin Cauchy s'en est occupé (*Journal de l'École polytechnique*, t. IX, p. 76). On ne peut cependant admettre cette proposition dans toute sa généralité. Par exemple, les solides comprenant des faces à double contour font exception. Si la surface d'un solide comprend six triangles complets : ABC, ABD, ACD, A'B'C', A'B'D', A'C'D' (fig. 64) et un triangle incomplet BCD dont le contour intérieur forme le triangle détaché B'C'D', les nombres $p = 12$, $n = 7$, $t = 8$ ne vérifient pas l'équation (5).

73. Pour trouver dans tout solide la relation entre le nombre des arêtes, celui des faces et celui des angles solides, il faut composer un polygone au moyen de triangles et un polyèdre à l'aide de tétraèdres. On peut arriver ainsi directement à l'équation (5) pour des solides dont les faces sont à contour simple.

Un polygone rectiligne se partage en triangles ayant pour sommet un point du plan et dont les uns s'ajoutent, les autres se retranchent, comme nous l'avons vu pour la sphère (n° **69**); le polygone peut avoir un seul contour extérieur ou avoir un contour extérieur et un contour intérieur. Il suffit de joindre ces contours par des droites et de considérer ces droites de jonction comme des côtés coïncidants de ce polygone (n° **69**). De même qu'un polygone se partage en triangles, de même un polyèdre se partage en tétraèdres. Supposons un corps n'ayant qu'une surface extérieure divisée en triangles. Par les côtés de ces triangles et un même point pris arbitrairement, menons des plans : nous formerons autour de ce point des angles solides, et avec les triangles de la surface, des tétraèdres dont l'ensemble donne le solide comme les triangles donnent la surface. Quand les faces sont divisées en triangles par des lignes menées par leurs sommets et un point de leur plan, on reconstitue le corps par addition ou soustraction des tétraèdres, comme la surface au moyen des triangles, de sorte que, lorsque l'angle rectiligne formé au point du plan devient plus grand, l'angle dièdre, ayant pour arête la ligne qui réunit le sommet commun des triangles au sommet commun des tétraèdres, croît également. Donc, de la même manière qu'une face résulte de triangles, les tétraèdres se combinent pour former un solide, nommé *pyramide;* dans ce solide, des triangles, appelés *faces*, ont un sommet commun, appelé *sommet* de la pyramide, et aboutissent à un même plan, appelé *base*. Le tétraèdre est une pyramide *triangulaire* et les autres pyramides, d'après le nombre des faces latérales, sont dites : *quadrangulaires*, *pentagonales*, etc. Les pyramides étant constituées, il faut les réunir pour réaliser le corps donné. Il est clair qu'on doit additionner ou soustraire les pyramides suivant que les angles solides au sommet augmentent ou diminuent. On en

conclut que *les solides à faces planes sont engendrés par la réunion de pyramides triangulaires* autour d'un sommet commun; il faut pour cela que chaque nouvelle pyramide qu'on introduit recouvre une, deux ou trois faces des précédentes, tandis que sa base se pose sur un plan où elle a un, deux ou trois côtés communs avec la figure formée par les pyramides précédentes. On peut même diviser un polyèdre en pyramides qui ne font que s'ajouter, propriété analogue à celle qui existe pour la décomposition d'un polygone en triangles (n° 69). En effet, en commençant par un angle dièdre quelconque, nous faisons tourner l'une de ses faces vers l'autre jusqu'à ce qu'elle passe par un sommet. Détachons alors du corps la pyramide ayant pour sommet ce point et pour base la face considérée, prise dans sa position primitive. En continuant ainsi, nous partagerons à la fin tout le corps en pyramides que l'on peut décomposer en pyramides triangulaires, en décomposant leurs bases en triangles.

Désignons par n, p, t le nombre des faces, celui des arêtes et celui des angles solides, en entendant par faces tous les triangles sans exception de la surface du corps, par arêtes tous les côtés des triangles, par angles solides tous ceux qui proviennent de la réunion des triangles autour d'un même point. Nous n'admettons, dans chaque cas particulier, une diminution de ces nombres n, p, t que lorsqu'elle résulte nécessairement de ce que des faces d'une pyramide viennent à être recouvertes.

Si nous appliquons une nouvelle pyramide par une seule de ses faces sur une autre face, le nombre n des faces s'augmente de 2, le nombre t des angles solides s'augmente de 1, le nombre p des arêtes s'augmente de 3, le nombre $p - n - t$ reste le même. Quand la nouvelle pyramide s'applique par deux de ses faces, les nombres p, t, n ne changent pas. Quand la nouvelle pyramide s'applique par trois de ses faces, n, p, t deviennent $n - 2$, $t - 1$, $p - 3$, de sorte que $p - n - t$ demeurant constant, malgré l'addition d'une pyramide, nous en concluons qu'il ne change pas non plus quand on retranche une pyramide. Cette différence, pour le tétraèdre, est de -2; donc, pour tous les corps à faces triangulaires, $p - n - t = -2$. Reste à examiner

le cas où plusieurs triangles sont situés dans une même face. Si deux triangles sont dans un même plan, les nombres n, p deviennent $n - 1$, $p - 1$, tandis que le nombre t ne change pas. En général, lorsque plusieurs triangles voisins sont situés dans un même plan, le nombre t des angles solides ne change pas, tandis que les nombres n et p subissent la même diminution. Si une face comprend m triangles se réunissant autour d'un même point, les nombres n, t, p deviennent $n - m + 1$, $t - 1$, $p - m$. Enfin, si m triangles situés dans un même plan constituent un polygone à double contour, les nombres n, t, p se changent en $n - m + 1, t, p - m$.

L'équation (5) est donc vraie pour tout solide dès qu'il n'a pas de faces à double contour ou quand il ne se compose pas de deux corps adhérents seulement par des sommets et des arêtes.

En combinant, avec l'équation (5), la relation (n° **71**) :

$$nm = tr$$

et en remarquant que, dans un solide régulier $2p = nm$, nous retrouvons facilement l'équation (4).

74. *La somme de deux angles d'un triangle sphérique est* $> \pi$, $= \pi$, π, *en même temps que la somme des deux côtés opposés.*

Dans le triangle ABC (fig. 65), soit $AB + BC = \pi$. Prolongeons les côtés au delà des points B, C jusqu'à ce qu'ils se rencontrent de nouveau en A'. On forme ainsi un nouveau triangle A'BC ayant les côtés égaux à ceux du précédent, savoir BC commun, $A'B = AC$, $A'C = AB$ (n° **33**). Les triangles ABC, A'BC sont égaux ; on peut s'en assurer en superposant les angles égaux en A et A'. On en déduit l'égalité des angles ACB, A'BC, puis

$$ACB + ABC = A'BC + ABC = \pi.$$

Au lieu du point B, prenons-en un autre B' sur le même

côté AB mais plus près de A. Nous obtenons le triangle AB'C, dans lequel $AB' + AC < \pi$, et l'on trouve pour les angles

$$\begin{aligned} ACB' + AB'C &= ACB - BCB' + \pi - BB'C \\ &= 2\pi - ABC - BCB' - BB'C < \pi \end{aligned} \qquad (n^\circ\ 68).$$

Prenons sur l'arc ACA' un point C' plus près de A' que C. Nous obtenons un triangle ABC' dont la somme des côtés $AB + AC' > \pi$. Pour les angles opposés à ces côtés, on a

$$\begin{aligned} AC'B + ABC' &= AC'B + ABC' + CBC \\ &= AC'B + BCC' + CBC' > \pi \end{aligned} \qquad (n^\circ\ 68).$$

Il suit de là que :

Dans tout triangle sphérique, l'angle extérieur, obtenu en prolongeant un côté, est supérieur, égal ou inférieur à un angle intérieur (non adjacent), suivant que la somme des deux côtés non communs est $< \pi$, $= \pi$ ou $> \pi$.

Soit, dans le triangle ABC (fig. 66), BD le prolongement de BC au delà de B. L'angle $ABD > ACB$ quand $AB + AC < \pi$; $ABD = ACB$ quand $AB + AC = \pi$, $ABD < ACB$ quand $AB + AC > \pi$. De même, $ABD > BAC$ quand $AC + BC < \pi$, $ABD = BAC$ quand $AC + BC = \pi$; $ABD < BAC$ quand $AC + BC > \pi$.

Dans tout triangle sphérique, quand la somme des côtés pris deux à deux $< \pi$, *il ne peut y avoir qu'un seul angle droit ou obtus.* Cela arrive, par exemple, dans les triangles dont chaque côté est plus petit que $\frac{1}{2}\pi$.

75. *Quand, dans un triangle rectangle sphérique, un côté de l'angle droit est plus petit que* π, *l'autre est, en même temps que l'angle opposé,* $>$, $=$ ou $< \frac{1}{2}\pi$.

Soit, dans le triangle ABC (fig. 67), le côté $AB < \pi$ et les angles adjacents CAB, CBA droits; par suite, les deux autres côtés $AC = \frac{1}{2}\pi$, $BC = \frac{1}{2}\pi$ (n° **59**). Si l'on fait tourner l'arc AC vers AB autour de A, il ne peut atteindre le côté AB sans rencontrer d'abord l'arc BC quelque part en C'. Si on le fait

tourner dans l'autre sens, il coupera le prolongement de l'arc BC quelque part en C', avant d'atteindre le prolongement de l'arc AB. Ainsi, dans le triangle ABC', le côté $BC' < \frac{1}{2}\pi$ en même temps que l'angle opposé; dans le triangle ABC, le côté $BC = \frac{1}{2}\pi$ quand l'angle opposé $CAB = \frac{1}{2}\pi$; dans le triangle ABC', le côté $BC'' > \frac{1}{2}\pi$, lorsque l'angle opposé $BAC'' > \frac{1}{2}\pi$.

Il résulte de là *qu'un arc perpendiculaire* $< \frac{1}{2}\pi$ *tombe dans l'angle aigu, et qu'un arc perpendiculaire* $> \frac{1}{2}\pi$ *tombe dans l'angle obtus.*

76. *Dans tout triangle sphérique, à un plus grand côté est opposé un angle plus grand ou plus petit que* π, *suivant que le troisième côté est plus petit que* π *ou plus grand.*

Appelons a, b, c les côtés du triangle (fig. 68) opposés aux angles A, B, C et supposons $c > a$, $b < \pi$. Prolongeons b, c au delà des sommets B, C jusqu'à ce qu'ils se rencontrent au point A'. Nous formons ainsi le triangle A'BC; la somme de deux côtés $a + \pi - c < \pi$, par conséquent l'angle $BA'C = A < G$ (n° **47**).

Si le côté $b > \pi$, en le remplaçant par l'arc $2\pi - b$, nous obtenons un triangle dans lequel aux côtés a, c sont opposés les angles $\pi - A$, $\pi - C$; le troisième côté $2\pi - b < \pi$, donc $\pi - C > \pi - A'$, d'où $A > C$.

La réciproque s'admet sans difficultés. *Dans tout triangle sphérique, à un plus grand côté est opposé un plus grand angle lorsque le troisième côté est plus petit que* π, d'abord parce que l'inégalité des côtés doit concorder avec l'inégalité des angles (n° **64**); ensuite parce que toute autre supposition contredirait ce que nous avons démontré plus haut.

77. *Dans tout triangle sphérique, la somme de deux côtés est plus grande que le troisième, si celui-ci est plus petit que* π.

Dans le triangle ABC (fig. 69), nommons a, b, c les côtés opposés aux sommets A, B, C, en supposant $B < \pi$; l'angle B sera aussi $< \pi$ (n° **46**). Prolongeons a au delà du point C,

jusqu'à ce que le prolongement CC′ devienne égal à b. Nous obtenons un triangle ACC′ dans lequel les angles CAC′, AC′C opposés aux côtés b sont égaux (n° **64**); l'angle BA′C est donc plus grand que BC′A. Ensuite, dans le triangle ABC′, le côté AC′ $< \pi$ (n° **46**), d'où BC′ $>$ AB (n° **76**) ou $a + b >$ C.

Comme la distance de deux points pris sur la sphère non aux extrémités d'un diamètre est moindre qu'une demi-circonférence, on peut conclure qu'en remplaçant un arc par deux autres compris entre les mêmes points, *l'arc de grand cercle représente la plus courte distance de deux points sur la sphère.*

78. Sur la sphère, la plus courte distance d'un point à un cercle est l'arc de grand cercle perpendiculaire moindre que $\frac{1}{2}\pi$, de façon que tout autre arc de grand cercle tracé entre le point et le cercle considéré est d'autant plus grand qu'il se rapproche plus du second arc perpendiculaire, lequel mesure la plus grande distance au cercle et est toujours plus grande que $\frac{1}{2}\pi$.

Soient ABC (fig. 70) un demi-cercle, et CDA un autre demi-cercle perpendiculaire au premier, de façon que DA $< \frac{1}{2}\pi$ et CD $> \frac{1}{2}\pi$. Joignons par l'arc DB l'extrémité de l'arc perpendiculaire DA à un point B quelconque du premier demi-cercle. On obtient un triangle rectangle DBA dont les côtés BA $< \pi$, BD $< \frac{1}{2}\pi$, l'angle DBA $< \frac{1}{2}\pi$ (n° **75**), par conséquent DB $>$ DA (n° **76**). Si maintenant nous prenons un autre point B′ sur le même demi-cercle ABC, plus éloigné de A que B, nous formons un triangle BDB′ dont les angles BDB′ $> \frac{1}{2}\pi$, DB′B $< \frac{1}{2}\pi$, par suite B′D $>$ BD. Ainsi l'arc BD croit en s'éloignant de A sur le cercle jusqu'au point opposé C, dont la plus grande distance CD au point D est donnée par la perpendiculaire au cercle CBA.

Cette proposition est immédiatement renfermée dans une de celles qui ont été démontrées plus haut (n° **66**); mais nous pouvons en ajouter ici une nouvelle : *L'arc minimum mené d'un point vers un cercle est aussi le plus petit angle qu'un arc mené par le point forme avec le cercle considéré.* Soit DB″ un arc per-

pendiculaire à DA, il rencontre le cercle ABC au point B″; comme $DB'' = \frac{1}{2}\pi$, $AB'' = \frac{1}{2}\pi$, l'angle DB″A est égal à l'arc AD (n° **43**). Dans le triangle DBB″, la somme des côtés $DB + DB'' < \pi$, par suite l'angle DBA > DB″A (n° **74**). Dans le triangle DB″B′, au contraire, $DB' + DB'' > \pi$, par conséquent l'angle DB″A < DB′A (n° **74**).

Il suit de là que : *si, dans un triangle rectangle sphérique, un côté de l'angle droit est plus petit que* $\frac{1}{2}\pi$, *l'autre est, en même temps que l'hypoténuse,* $< \frac{1}{2}\pi$, $= \frac{1}{2}\pi$ ou $> \frac{1}{2}\pi$; *si ce côté est plus grand que* $\frac{1}{2}\pi$, *l'autre est plus petit que* $\frac{1}{2}\pi$ *quand l'hypoténuse est* $> \frac{1}{2}\pi$; *il est égal à* $\frac{1}{2}\pi$ *en même temps que l'hypoténuse et il est* $> \frac{1}{2}\pi$ *quand l'hypoténuse est* $< \frac{1}{2}\pi$ Dans le triangle DB′A, un côté de l'angle droit DA est $< \frac{1}{2}\pi$, l'autre AB′ est plus grand que $\frac{1}{2}\pi$, l'hypoténuse $DB' > \frac{1}{2}\pi$. Dans le triangle DCB′, le côté DC est $> \frac{1}{2}\pi$, CB′ est $< \frac{1}{2}\pi$, l'hypoténuse $DB' > \frac{1}{2}\pi$, etc.

79. *Si les côtés d'un triangle sphérique sont tous plus petits qu'un demi-cercle, on peut construire un triangle dont les côtés sont supplémentaires des angles du premier, et les angles supplémentaires des côtés du triangle donné.*

On veut dire que si l'on a dans un triangle $a < \pi$, $b < \pi$, $c < \pi$ et si A, B, C désignent les angles opposés à ces côtés, on peut construire un triangle ayant pour côtés $\pi - A$, $\pi - B$, $\pi - C$ et pour angles $\pi - a$, $\pi - b$, $\pi - c$.

Observons que si l'on parvient à construire un triangle ayant pour côtés A, B, $\pi - C$ et pour angles opposés $a, b, \pi - c$, il suffit de prolonger les côtés A, B au delà du côté $\pi - c$ jusqu'à leur rencontre pour obtenir un triangle dont les côtés sont $\pi - A$, $\pi - B$, $\pi - C$ opposés aux angles $\pi - a$, $\pi - b$, $\pi - c$. Nous passons, inversement de ce dernier triangle, soit au triangle ayant pour côtés A, $\pi - B$, C et pour angles a, $\pi - b$, c, soit au triangle dont les côtés sont $\pi - A$, B, C et les angles opposés à ces côtés $\pi - a$, b, c.

Supposons d'abord $C = \frac{1}{2}\pi$, $a < \frac{1}{2}\pi$, $b < \frac{1}{2}\pi$, par suite $c < \frac{1}{2}\pi$ (n° **78**). Prolongeons a, c au delà de b, jusqu'à ce que les prolongements soient égaux à $\frac{1}{2}\pi - a$, $\frac{1}{2}\pi - c$ (fig. 71), et joignons

les extrémités par un arc B. Prolongeons les arcs b, B de l'autre côté de $\frac{1}{2}\pi - c$ jusqu'à ce qu'ils se rencontrent. Nous aurons un triangle rectangle dont l'hypoténuse est $\frac{1}{2}\pi - b$, les autres côtés $\frac{1}{2}\pi - c$, $\frac{1}{2}\pi - B$, ayant pour angles opposés $\frac{1}{2}\pi - a$, A. Prolongeons les côtés $\frac{1}{2}\pi - b$, $\frac{1}{2}\pi - c$ de ce triangle au delà du côté $\frac{1}{2}\pi - B$, prenons les prolongements égaux à b, c et joignons les extrémités par un arc A que nous prolongerons de même que le côté $\frac{1}{2}\pi - B$ au delà de b, jusqu'à ce qu'en se rencontrant ils déterminent un triangle rectangle d'hypoténuse B, de côtés b, $\frac{1}{2}\pi - A$, les angles opposés à ces côtés étant c, $\frac{1}{2}\pi - a$. Il est inutile de considérer l'ordre dans lequel les côtés se suivent, parce qu'il se renverse quand on passe d'un triangle au triangle opposé (n° **44**).

Soit, d'une façon générale, $a < \frac{1}{2}\pi$, $b < \frac{1}{2}\pi$, $c < \pi$ (fig. 72). Il doit y avoir dans un tel triangle deux angles aigus (n° **74**), par exemple A, B, qui sont nécessairement tels lorsque $c > a$, $> b$. Du sommet C abaissons l'arc perpendiculaire $p < \frac{1}{2}\pi$ sur le côté c, qui est ainsi partagé en deux : x du côté a, $c - x$ du côté b (n° **75**) opposées aux parties X, C — X de l'angle C. Remarquons qu'ici x est $< \frac{1}{2}\pi$, $c - x < \frac{1}{2}\pi$ (n° **78**), de même que $X < \frac{1}{2}\pi$, $C - X < \frac{1}{2}\pi$ (n° **75**). En nous fondant sur ce qui a été démontré précédemment, nous pouvons construire deux triangles rectangles : dans l'un, les côtés de l'angle droit sont p, $\frac{1}{2}\pi - X$, les angles opposés a, $\frac{1}{2}\pi - x$, l'hypoténuse B ; dans l'autre, les côtés sont p, $\frac{1}{2}\pi - C + X$, les angles opposés b, $\frac{1}{2}\pi - c + x$ et l'hypoténuse A. Posons les deux triangles l'un contre l'autre en faisant coïncider leur côté p ; nous en obtenons un dont les côtés sont A, B, $\pi - C$ et les angles a, b, $\pi - c$. Nous passons de ce triangle, comme nous l'avons remarqué plus haut, à un autre qui a pour côtés $\pi - A$, $\pi - B$, $\pi - C$ et pour angles opposés à ces côtés $\pi - a$, $\pi - b$, $\pi - c$, et de même nous pouvons tracer un triangle ayant pour côtés A, $\pi - B$, C et pour angles a, $\pi - b$, c, ou dont les côtés seraient $\pi - A$, B, C et les angles $\pi - a$, b, c ; il faut donc admettre la possibilité de construire ces nouveaux triangles dès que, dans le triangle donné,

on a deux côtés chacun $< \frac{1}{2}\pi$, le troisième étant seulement $< \pi$.

Soit $a = \frac{1}{2}\pi$, $b < \pi$, $c = \frac{1}{2}\pi$; on a donc $A = \frac{1}{2}\pi$, $C = \frac{1}{2}\pi$, $B = b$. En prolongeant a, b au delà de c jusqu'à ce qu'ils se se rencontrent, nous obtenons un triangle ayant pour côtés $\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi - B$; les angles seront respectivement $\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi - b$. La proposition se vérifie donc dans ce cas.

Soient $a = \frac{1}{2}\pi$, $b < \frac{1}{2}\pi$, $c > \frac{1}{2}\pi$ et $< \pi$. Posons sur le côté c, à partir du sommet B, un arc $\frac{1}{2}\pi$ (fig. 73), dont nous joindrons l'extrémité au sommet C. On obtient un triangle qui a pour côtés b, B, $c - \frac{1}{2}\pi$; les angles opposés sont $\frac{1}{2}\pi$, A, $C - \frac{1}{2}\pi$. Nous avons de plus $c - \frac{1}{2}\pi < \frac{1}{2}\pi$, $B < \frac{1}{2}\pi$, $A < \frac{1}{2}\pi$ (n° **75**); on peut donc avoir un triangle rectangle avec une hypoténuse A et des côtés B, $\pi - C$ opposés aux angles b, $\pi - c$. En prolongeant A, B au delà de $\pi - C$ jusqu'à leur rencontre, nous obtenons un triangle ayant pour côtés $\pi - A$, $\pi - B$, $\pi - C$, opposés aux angles $\frac{1}{2}\pi$, $\pi - b$, $\pi - c$.

Soit $a > \frac{1}{2}\pi$ et $< \pi$, $b < \pi$, $c > \frac{1}{2}\pi$ et $< \pi$. Prolongeons a, c jusqu'à leur rencontre de l'autre côté de b. Il se forme un triangle (fig. 74) ayant les côtés $\pi - a < \frac{1}{2}\pi$, $b < \pi$, $\pi - c < \frac{1}{2}\pi$ opposés aux angles $\pi - A$, B, $\pi - C$. On peut donc passer de ce triangle à un autre dont les côtés seraient A, $\pi - B$, C et les angles b, $\pi - b$, c; puis à un triangle ayant les côtés $\pi - A$, $\pi - B$, $\pi - C$, opposés aux angles $\pi - a$, $\pi - b$, $\pi - c$.

La proposition est ainsi prouvée dans tous les cas lorsqu'on a les côtés $a < \pi$, $b < \pi$, $c < \pi$. Il est facile de conclure de là que, *dans tous ces triangles, la somme des côtés est toujours moindre qu'une circonférence* (n° **68**).

80. *La surface d'un triangle sphérique est toujours moindre que le plus petit côté quand la somme des deux autres est plus petite qu'une demi-circonférence.*

Soit dans le triangle ABC (fig. 75), si les côtés sont inégaux, c le plus grand, a le plus petit, ou plus généralement c non moindre, a non plus grand que les autres; de plus, nous supposons la somme de deux côtés $< \pi$, et par suite les angles A, B

opposés à a, b aigus (n° **74**). L'arc perpendiculaire p abaissé du sommet C sur le côté c est plus petit que $\frac{1}{2}\pi$ (n° **75**), et partage c en deux parties : x du côté de b, $c - x$ vers a (n° **75**) ; b et x, a et $c - x$ sont plus petits qu'un quart de circonférence; a est $> p$ (n° **78**). Les deux demi-cercles A'ABB', A'CB' perpendiculaires aux extrémités de p, limitent le fuseau dont la surface est p et dans lequel est enfermé le triangle donné ABC, la surface de ce triangle est donc plus petite que p, à plus forte raison plus petite que a.

A mesure donc qu'un côté diminue quand la somme des deux autres est $< \pi$, la surface du triangle diminue indéfiniment et la somme des angles devient aussi voisine de π que l'on veut.

Lorsque deux côtés diminuent, le troisième diminue indéfiniment, car la somme des deux premiers est plus grande que le dernier et la somme de deux côtés demeure enfin constamment inférieure à π. Nous en concluons que, lorsque deux côtés diminuent, la surface du triangle diminue à volonté et que la somme des angles s'approche autant qu'on veut de π.

CHAPITRE VI.

ÉGALITÉ DES TRIANGLES.

81. L'égalité de deux triangles exige que les angles et les côtés de l'un soient respectivement égaux aux angles et aux côtés de l'autre, et que leur ordre soit le même dans les deux triangles. Mais parfois, quand la disposition est la même, l'égalité de quelques éléments seulement — nous appellerons ainsi les côtés et les angles des triangles et polygones — entraîne l'égalité des autres et l'égalité des triangles eux-mêmes. La recherche de ces cas forme l'objet de ce chapitre; pour la brièveté du langage, nous dirons seulement quels sont les éléments égaux, en entendant par là que ces éléments de l'un des triangles sont égaux aux éléments correspondants de l'autre triangle. Les figures seront désignées par des lettres, et l'égalité s'exprimera par le signe $\overline{=}$.

Dans un polygone rectiligne, le sens dans lequel se suivent les côtés est indifférent, parce que ce sens change quand on retourne le plan sur son autre face. Le sens des polygones sphériques change quand on passe au polygone symétrique qui correspond à l'angle solide opposé obtenu en prolongeant les faces de l'autre côté du centre. Nous emploierons indifféremment ici, en parlant d'égalité, l'un ou l'autre des deux polygones symétriques.

Nous nous représentons la construction des polygones, rectilignes et sphériques, de la façon suivante : nous posons chaque fois un côté contre un autre sous un angle déterminé jusqu'à ce que le dernier rencontre le premier. Les côtés et les angles doivent donc être les éléments essentiels qui déterminent l'égalité des polygones et d'où dépendent toutes les autres particularités et en général toutes les propriétés d'un polygone. Il est clair que la grandeur du dernier côté et les angles qu'il fait avec les deux

côtés adjacents, sont déterminés par la grandeur de tous les autres côtés et de tous les autres angles.

La construction des polygones, au moyen des côtés placés avec leurs angles dans un ordre déterminé, conduit aux propositions suivantes :

Des polygones sont égaux quand de leurs n *côtés,* n — 1 *sont égaux ainsi que les* n — 2 *angles compris entre eux.*

Des polygones sont égaux quand de leurs n *côtés,* n — 2 *sont égaux, ainsi que les* n — 1 *angles adjacents à ces côtés.*

On doit dire, en particulier, des triangles rectilignes et sphériques, ce qui suit :

Des triangles sont égaux quand ils ont deux côtés égaux ainsi que l'angle compris entre ces côtés.

Des triangles sont égaux quand un côté et les angles adjacents sont égaux.

Il suit de là que :

Des triangles rectangles sont égaux quand les côtés de l'angle droit sont égaux, car on sous-entend l'égalité des angles droits.

Des triangles rectangles sont égaux quand un côté de l'angle droit et l'angle adjacent sont égaux.

Dans une circonférence, à des cordes égales sont opposés des angles égaux, car l'égalité des rayons entraîne ici l'égalité des triangles.

82. *Des triangles rectilignes sont égaux quand les trois côtés sont égaux.*

Dans les triangles ABC, A′B′C′ (fig. 76), supposons les côtés AB = A′B′, AC = A′C′, BC = B′C′. Soit AB un côté dont les angles adjacents A, B sont aigus (n° **49**). Appliquons le triangle A′B′C′ contre le triangle ABC, le côté A′B′ sur son égal AB, le point A′ en A et B′ en B, joignons les sommets C, C′ par une ligne qui doit passer entre A et B et est perpendiculaire à AB (n° **52**). (Le reste de la démonstration est connu.)

83. *Des triangles sphériques sont égaux quand les trois côtés sont égaux.*

(Démonstration analogue à la précédente, voir fig. 77, 78 et 79.)

84. *Des triangles rectilignes sont égaux quand deux côtés et l'angle opposé au plus grand côté sont égaux.*

Soit, dans les triangles ABC, A'B'C' (fig. 80), les côtés BC = B'C', AC = A'C', AC > BC l'angle, B = B'. Appliquons le triangle A'B'C' sur le triangle ABC, le plus petit côté B'C' sur BC, le point B' en B et C' en C. Le côté A'B', qui se place sur BA, se terminera en A, car le point A' ne peut être ni de l'un ni de l'autre côté. Autrement on aurait un triangle ACA' isocèle ayant des angles aigus à la base AA' et l'angle obtus adjacent à l'un d'eux appartiendrait au triangle ABC ou A'BC dont il serait le plus grand angle (n° **49**), alors qu'il est opposé au plus petit côté BC ou B'C' (n° **54**).

Il suit de là que *des triangles rectangles sont égaux lorsqu'un côté de l'angle droit et l'hypoténuse sont égaux*, car les angles droits sont égaux et opposés au plus grand côté.

85. *Des triangles rectilignes sont égaux quand deux côtés et l'angle opposé au plus petit de ces côtés sont égaux, les deux triangles étant en même temps acutangles ou obtusangles.*

Soit, dans les triangles ABC, A'B'C' (fig. 81), les côtés AC = A'C', BC = B'C', AC > BC, l'angle A = A'. On doit supposer les angles ou bien tous aigus ou bien l'un obtus et les autres aigus. Dans le premier cas, les triangles se superposent l'un à l'autre quand on transporte le point A' en A et C' en C. B' ne peut se placer ni entre A et B, ni au delà de B sur le prolongement de AB. Sinon on obtiendrait un triangle CBB' isocèle ayant des angles aigus à la base BB' et l'un des angles obtus adjacents appartiendrait au triangle ABC ou au triangle AB'C.

Si dans les triangles ABC, A'B'C' un angle est obtus, il doit être opposé au plus grand côté, donc à AC = AC' ou à AB et A'B'. Dans les deux cas, quand on superpose les triangles, le point B' ne peut tomber qu'en B : sinon nous aurions un triangle isocèle BCB', dont un des angles aigus appartiendrait soit au triangle ABC et serait opposé à AC, soit au triangle AB'C où il serait opposé à AC, ou bien il déterminerait un angle adjacent obtus dans le triangle donné outre les angles obtus aux points C et C'.

Si donc les triangles ABC, A'B'C' ne sont pas égaux, bien qu'on ait AC = A'C', BC = B'C', $< A = < A'$, leur inégalité ne peut provenir que de ce qu'au plus grand côté est opposé dans l'un un angle obtus et dans l'autre un angle aigu. Soit, par exemple, l'angle $B < \frac{1}{2}\pi$ dans le triangle ABC, AC étant > BC. En décrivant un cercle autour de C avec un rayon BC, nous trouvons encore un point B d'intersection entre les extrémités A, B (n° **51**). On construit ainsi un triangle AB'C qui doit être égal au triangle A'B'C' et où, par suite, B' est un angle obtus.

86. *Des triangles sphériques sont égaux lorsque deux côtés et un angle opposé à ces côtés sont égaux, avec cette condition que les angles opposés aux autres côtés égaux soient en même temps* $< \frac{1}{2}\pi$, $= \frac{1}{2}\pi$, $> \frac{1}{2}\pi$.

Soit, dans les triangles ABC, A'B'C' (fig. **82**), les côtés AB = A'B', BC = B'C', $< A = < A'$. Décrivons sur la surface sphérique autour de B une circonférence de rayon BC. Elle peut ou bien toucher l'arc AC au seul point C, ou bien couper la circonférence à laquelle appartient AC (n° **66**) en C et en un second point. Dans le premier cas, BC est perpendiculaire à AC, de même que dans le triangle A'B'C' le côté B'C' est perpendiculaire sur A'C'. Dans le second cas, que le point d'intersection se trouve en C' entre les extrémités de A'C ou en C'' sur le prolongement de AC au delà du sommet C, on aura toujours un triangle isocèle BCC' ou BCC'', dont les angles à la base sont égaux. De plus, le triangle ABC' ne peut être égal au triangle A'B'C, parce que quand l'angle B'C'A' = BC'A, on a

$$< B'C'A' + < BCA = < BC'A + < BCA = \pi.$$

Le triangle A'B'C' ne peut non plus être égal au triangle ABC'', parce que dès que $< B'C'A' = < BC''A$, on a

$$< B'C'A' + < BCA = < BC''A + < BCA = \pi.$$

Donc, nécessairement les triangles ABC, A'B'C' sont égaux.

Il en résulte que *sont égaux les triangles ayant deux côtés égaux avec un angle droit ou obtus égal opposé à l'un de ces côtés,*

la somme de ceux-ci étant supposée inférieure à une demi circonférence, parce que à l'autre côté doit être opposé dans les deux triangles un angle aigu (n° **74**).

87. *Des triangles rectilignes sont égaux quand ils ont un côté, un angle adjacent à ce côté et l'angle opposé égaux.*

Soient, dans les triangles ABC, A′B′C′ (fig. 81), le côté AC = A′C′, les angles A = A′, B = B′. Si nous transportons le triangle A′B′C′ sur le triangle ABC en superposant les côtés égaux AC = A′C′, en plaçant A en A′, le côté A′B′ prendra la direction AB et devra s'arrêter en B. S'il en était autrement, on aurait un triangle BCB′ dont un des angles égaux B, B′ serait intérieur et l'autre extérieur, tandis que ce dernier est toujours plus grand que l'intérieur (n° **53**).

Ainsi, *sont égaux des triangles rectangles lorsque l'hypoténuse et un angle aigu sont égaux ou un côté de l'angle droit et l'angle opposé,* car l'égalité des angles droits complète les conditions d'égalité.

88. *Des triangles sphériques sont égaux quand ils ont un côté, l'angle adjacent et l'angle opposé égaux, à condition que la somme des deux autres côtés ne fasse pas une demi-circonférence.*

Soient, dans les triangles ABC, A′B′C′ (fig. 84), le côté AB = A′B′, les angles A = A′, C = C′. Si nous superposons les triangles A′B′C′ et ABC, en plaçant le côté A′B′ sur son égal AB, le côté A′C′, commençant en A, suivra AC et ne pourra se terminer ni en C′ ni en C″ de l'un ou de l'autre côté de C sur le prolongement de AC. Sinon on aurait un triangle CBC′ ou CBC″ dans lequel l'égalité de l'angle extérieur et de l'angle intérieur formé près de l'arc AC′ ferait que la somme des côtés opposés, BC + B′C′, serait égale à π (n° **74**). Dans ce cas, si l'angle $C = \frac{1}{2}\pi$, d'où $C' = \frac{1}{2}\pi$, les triangles BCC′, BCC″ deviennent isocèles ; ce qui exige $BC = B'C' = \frac{1}{2}\pi$, $AB = A'B' = \frac{1}{2}\pi$ et l'angle $A = A' = \frac{1}{2}\pi$ (n° **62**). *Donc des triangles rectangles sphériques sont égaux quand ils ont l'hypoténuse égale et un angle aigu égal.*

89. *Des triangles sphériques sont égaux quand ils ont les trois angles égaux.*

Soient, dans les triangles ABC, A'B'C' (fig. 85), les angles $A = A'$, $B = B'$, $C = C'$. Il suit de là que les surfaces des triangles sont égales (n° **68**); quand donc nous transportons le triangle A'B'C' sur le triangle ABC, en superposant les côtés comprenant des angles égaux, par exemple, les angles A, A', l'inégalité des triangles exigerait que l'un sortît de l'autre. Soit $A'B' < AB$, par suite $A'C' > AC$, de sorte que BC', commençant sur le côté AB à l'intérieur du triangle, coupe BC en un point D, puis rencontre en C' le prolongement de AC au delà de C. On obtient deux triangles BDB', CDC', dans lesquels $BD + B'D = \pi$, $CD + C'D' = \pi$ (n° **74**), donc $BC + B'C' = 2\pi$; mais comme BC et B'C' doivent être, en même temps que A, $< \pi$, ou $= \pi$ ou $> \pi$ (n° **46**), on ne peut admettre que l'hypothèse : $BC = B'C' = \pi$. Seulement, dans ce dernier cas, les triangles ABC, A'B'C', déterminant des fuseaux, sont égaux à cause de l'égalité des angles dièdres.

90. *La somme des angles d'un triangle rectiligne ne peut être plus grande que* π.

Appelons S la somme des angles du triangle. S'ils sont inégaux, soit A le plus petit, ou plus généralement un angle pas plus grand que les deux autres. Nous avons vu (n° **53**) que tout triangle ABC (fig. 46) peut être converti en un autre AFC, dont la somme des angles reste la même, tandis que la somme $ABC + ACB$ de deux des angles du premier triangle est égale à un angle ACF du second; le troisième angle BAC se transporte donc dans le nouveau triangle en se partageant en deux AFC, FAC. Soit donc ABC le triangle dont la somme des angles est S; supposons ensuite que l'angle $BAC = A$ ne soit pas plus grand que les deux autres. Dans le nouveau triangle AFC, la somme de tous les angles est également S, et l'un des angles aux points A, F doit être $\leqq \frac{1}{2} A$. Mais dans le triangle ACF,

$$S = ACF + FAC + AFC = \pi - FCD + A < \pi + A.$$

En partageant dans le dernier triangle en deux parties égales le côté opposé à l'angle $\leqq \frac{1}{2} A$ et continuant à transformer ainsi un triangle en un autre, nous devons conclure que

$$S < \pi + 2^{-n} A;$$

dans cette expression, n est un nombre entier aussi grand que l'on veut et $2^{-n} A$ aussi petit que l'on veut; on ne peut donc admettre que $S - \pi$ soit un angle positif, et on doit dire ou bien que $S = \pi$ ou bien que $S < \pi$.

C'est Legendre qui a le premier démontré cette proposition, en faisant préalablement remarquer qu'un côté du triangle croît avec l'angle opposé. Soit, dans le triangle ABC (fig. 84), le côté $BC \gtreqless AB$, et par suite l'angle BCA aigu. Donnons au côté BC une nouvelle position BD en diminuant l'angle ABC. On obtient deux triangles : l'un, isocèle, BCD avec l'angle aigu BDC, l'autre BDA avec l'angle aigu BDA opposé au côté AB; donc la somme des angles $ADB + BDC < \pi$. Il résulte de là que les points B, D se trouvent de part et d'autre de la ligne AC et celle-ci forme ainsi avec AD et CD le triangle ADC, où l'angle $ACD = BDC - BCA < ADC$, d'où on conclut que le côté $AD < AC$ (n° **54**).

Appelons b, c les côtés du triangle ABC opposés aux angles B, C. Prolongeons le côté b au delà du point C et sur le prolongement appliquons b sans solution de continuité, en transportant en même temps le triangle ABC de A vers C, de façon que l'on ait, dans tous les triangles égaux, les côtés $AC = CC' = C'C''...$, et $AB = CB' = C'B''...$; $BC = B'C' = B''C''...$, et les angles $BAC = B'CC' = B''C'C''...$; $BCA = B'C'C = B''C''C'...$ En joignant les sommets de tous ces triangles par les lignes BB', B'B''... nous obtenons encore des triangles BCB', B'C'B''... dont les angles aux points C, C'... doivent être moindres que ABC si nous supposons la somme des angles plus grande que π dans le triangle ABC. En ce cas, tous les côtés BB', B'B''... seront égaux entre eux et chacun sera $< b$. En désignant par la lettre a

le côté BB′ et par n le nombre de ces côtés, nous obtiendrons (n° 55)

$$2c > n(b - a),$$

ce qui est impossible pour toute valeur positive entière de n.

Il en résulte que *l'angle extérieur obtenu en prolongeant un côté peut être égal ou supérieur à la somme des deux angles intérieurs non adjacents.*

91. *Si, dans un seul triangle, la somme des angles égale π, elle a la même valeur dans tous les triangles.*

Supposons que, dans le triangle ABC (fig. 85), les angles A, C soient aigus et que la somme des trois angles soit π. Du sommet B abaissons une perpendiculaire p sur le côté AC, partagé ainsi en deux parties q, r, le triangle étant lui-même divisé en deux triangles rectangles : l'un ayant pour côtés de l'angle droit p, q et la somme des trois angles étant, par exemple, $\pi - \alpha$; l'autre ayant pour côtés de l'angle droit p, r et la somme des trois angles étant, par exemple, $\pi - \beta$. Dans le triangle donné ABC, la somme des angles sera $\pi - \alpha - \beta = \pi$, et comme α, β ne peuvent être des quantités négatives (n° 90), on a $\alpha = 0$, $\beta = 0$, c'est-à-dire que, dans les deux triangles rectangles, la somme des trois angles est égale à π et la somme des angles aigus vaut $\frac{1}{2}\pi$.

En plaçant contre l'hypoténuse du triangle qui a pour côtés de l'angle droit p, q l'hypoténuse d'un triangle égal de façon que les lignes égales, au lieu d'être adjacentes, soient opposées, nous obtenons un quadrilatère à angles droits (fig. 86), qu'on appelle à raison de cette propriété *rectangle*. Avec n de ces rectangles, en les juxtaposant par leurs côtés p, nous construisons un nouveau rectangle ABCD dont le côté $AD = BC = p$, et le côté $AB = DC = nq$. Nous passons de même au rectangle ABFE dont le côté $AB = EF = nq$, $AE = BF = mp$, en entendant par n, m des nombres entiers arbitraires. Partageons par la droite BE le rectangle ABCD en deux triangles rectangles égaux

ABE, BEF (n° **81**); la somme des angles est la même dans chacun, elle est donc π.

Un triangle quelconque ABC (fig. 87) nous étant maintenant donné, nous pourrons toujours prendre des nombre entiers n, m assez grands pour que le côté de l'angle droit AB soit $< mp$ et AC $< nq$. Cela fait, prolongeant AB, AC au delà des points B, C, et faisant AD $= mp$, AE $= nq$, nous obtenons un triangle DAE dont les angles ont pour somme π et à l'intérieur duquel se place le triangle ABC, de sorte qu'en menant la ligne DC nous partageons le triangle ADE en trois : DCE, BCD, ABC. Si nous supposons que, dans ces derniers triangles, les angles ont pour somme $\pi - \alpha$, $\pi - \beta$, $\pi - \gamma$, on doit avoir dans le triangle ADE, $S = \pi - \alpha - \beta - \gamma = \pi$, car après avoir ajouté tous les angles on retranche 2π en B et C; α, β, γ ne pouvant être négatifs, on a donc : $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$. En s'assurant que $\gamma = 0$, on prouve que dans tout triangle rectangle la somme des angles est égale à π, et comme tout triangle en général se divise en deux triangles rectangles, les trois angles ont pour somme π dans tous les triangles.

Legendre a également démontré cette proposition (*Éléments de géométrie*); mais, étendant la géométrie, nous admettrons aussi bien l'une que l'autre des hypothèses qui jusqu'à présent restent possibles. La *Géométrie usuelle*, d'accord avec les mesures de fait, admet que la somme des trois angles dans les triangles équivaut à deux droits. La *Géométrie imaginaire*, que nous ne pouvons construire que par la pensée, a pour base l'autre supposition que, dans tout triangle, la somme des trois angles est moindre que deux droits. Cette somme croît à mesure que les côtés diminuent; quel que soit, par exemple, l'angle BAC (fig. 87), si la somme des trois angles est $\pi - \alpha$ dans Δ ABC, $\pi - \beta$ dans Δ BCD, $\pi - \gamma$ dans Δ DCE, nous trouvons qu'elle est $\pi - \alpha - \beta - \gamma$ dans Δ ADE.

Au contraire, si nous admettons que π représente la somme des angles dans tout triangle, cette somme sera dans un polygone de n côtés à simple contour $(n - 2)\pi$, car $n - 2$ est le nombre minimum de triangles dans lesquels le polygone donné

peut se décomposer (n° 69). Cela résulte aussi de l'expression de la surface du triangle sphérique (n° 69), que nous devons alors considérer comme nulle.

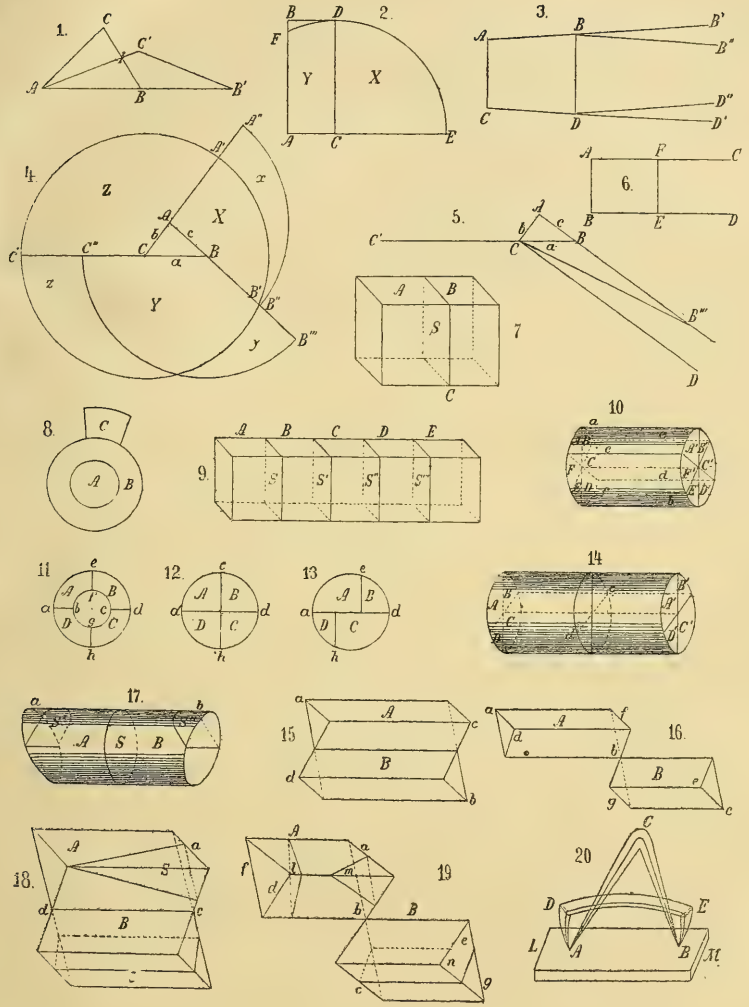
92. *Les triangles rectilignes ayant leurs angles égaux sont égaux, si la somme de ces angles n'est pas* π.

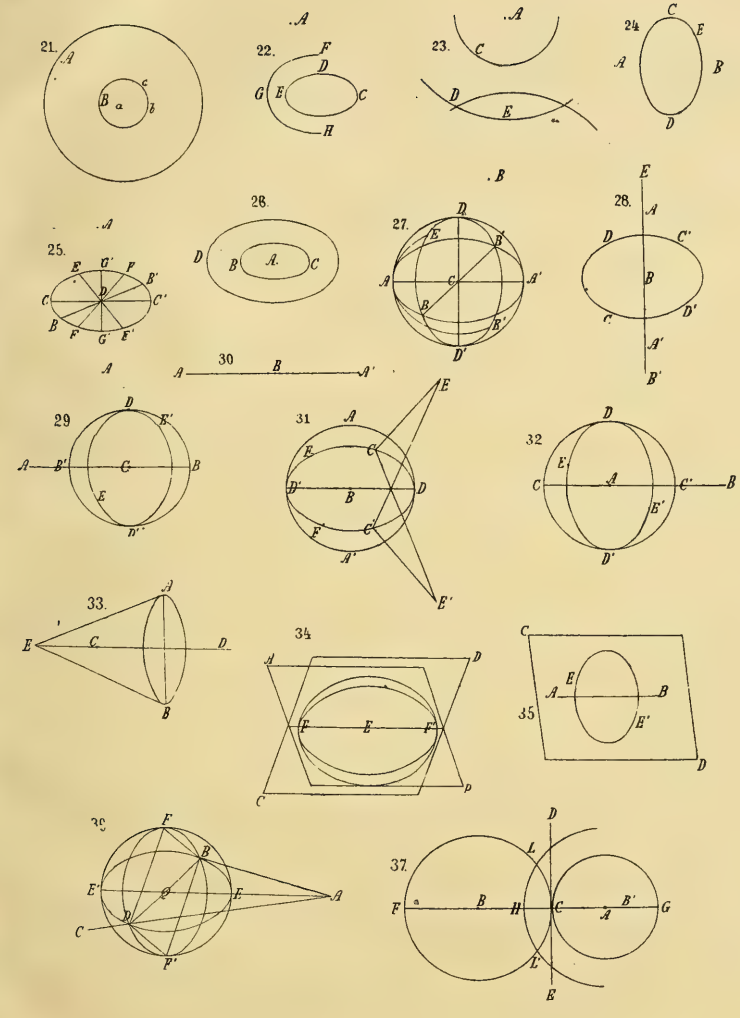
Soient dans les triangles rectilignes ABC, A'B'C' (fig. 88), les angles $A = A', B = B', C = C', A + B + C < \pi$. Si nous posons le triangle A'B'C' sur le triangle ABC, en superposant les côtés des angles égaux A, A', un des triangles ne peut être contenu dans l'autre (n° 91). Si l'un sort en partie de l'autre, par exemple si le point B' tombe sur le côté AB entre les extrémités A, B et que le point C' se trouve hors du triangle ABC, sur le prolongement de AC, le côté B'C' coupant BC au point D, on a deux triangles BDB', CDC' dont les angles ont pour somme, dans chacun, $\pi +$ BDB', ce qui est impossible (n° 90).

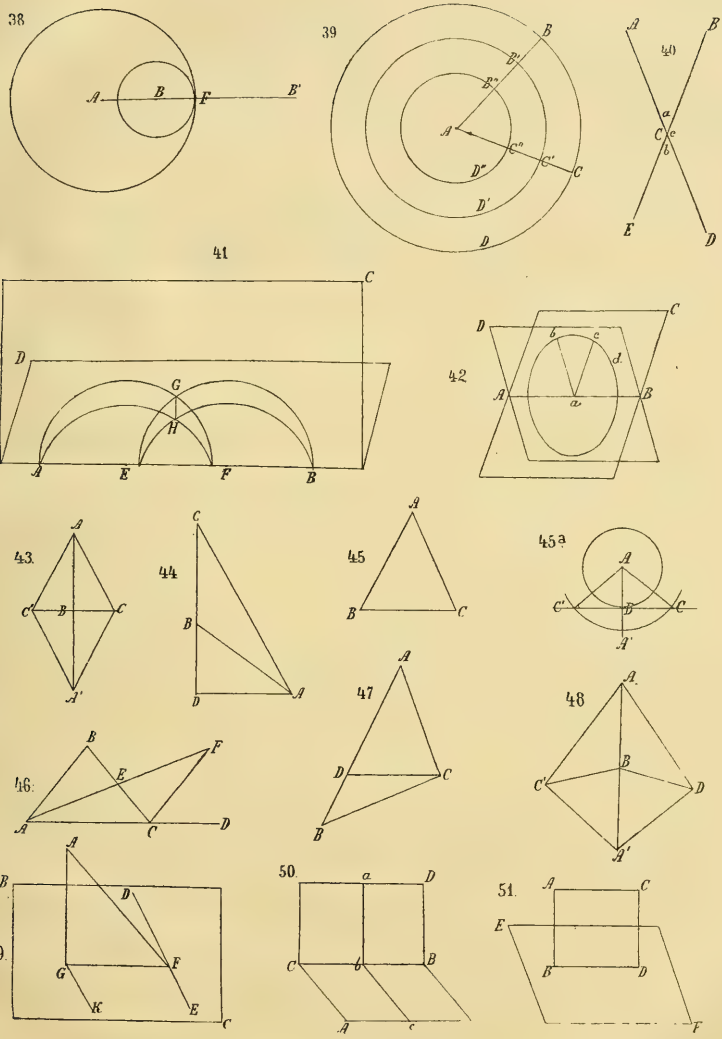
En supposant la somme des trois angles égale à π, les triangles peuvent être inégaux, malgré l'égalité des trois angles : car cette hypothèse revient à l'égalité de deux angles, un côté demeurant arbitraire (n° 81).

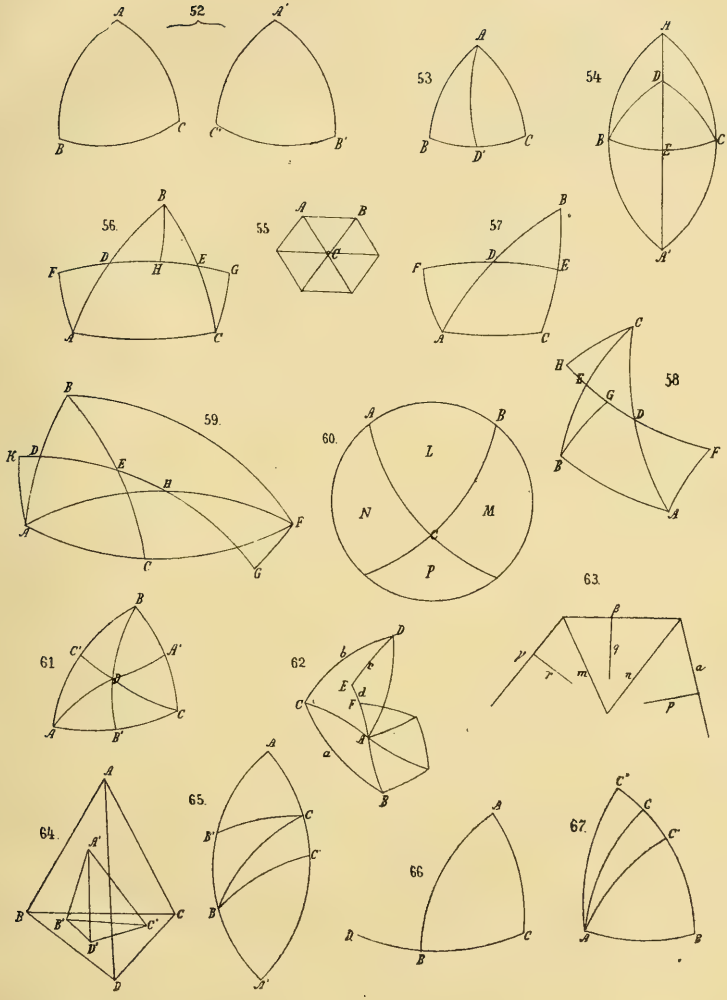
(La suite, comprenant le chapitre des parallèles et celui des lignes limites, surfaces limites et triangles limites, paraîtra dans le tome III des *Mémoires* de la Société.)

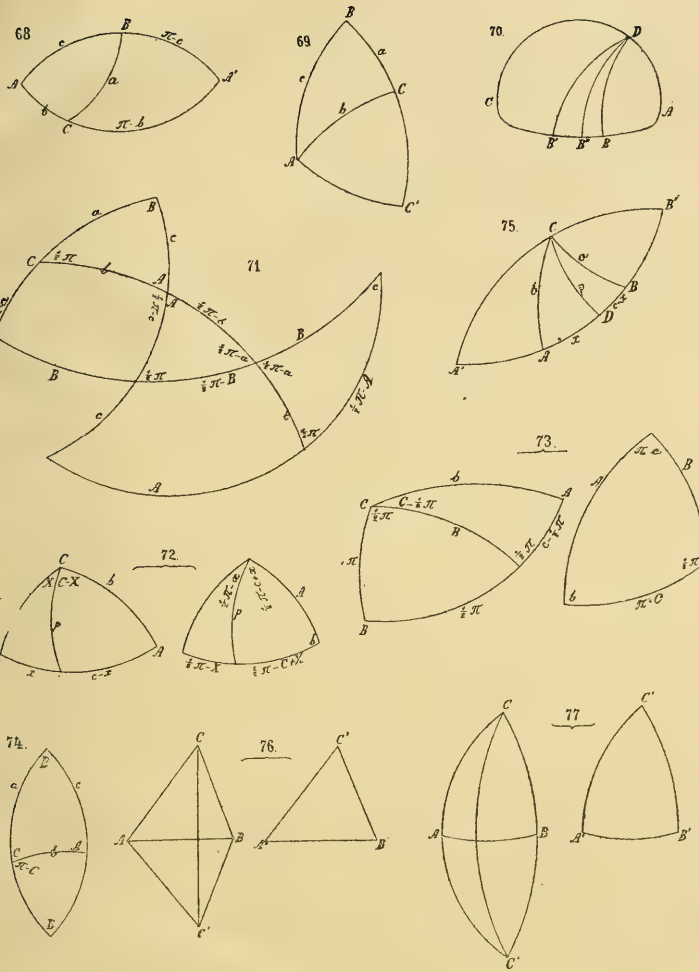
Mém. de la Soc. des sc. de Liége,
3e série, tome II.

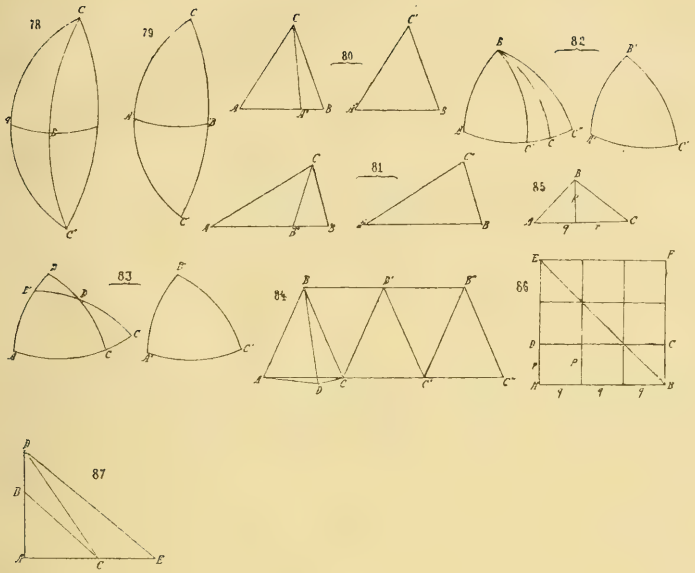



21.
22.
23.
24.
25.
26.
27.
28.
29
30
31
32
33.
34
35
36
37.


38
A
B
F
B'
39
B
B'
B''
A
C''
C'
C
D''
D'
D
40
A
B
a
C
c
b
E
D
41
C
D
G
H
A
E
F
B
42
D
C
b
c
d
A
a
B
43
A
C
B
C
A'
44
C
B
D
A
45
A
B
C
45a
A
C'
B
C
A'
46
B
F
E
A
C
D
47
A
D
C
B
48
A
B
C'
D
A'
49
B
A
D
F
G
K
E
C
50
a
D
C
b
B
A
c
51
A
C
E
B
D
F


52
53
54
56.
55
57
58
59.
60.
61
62
63.
64.
65.
66
67
L
M
N
P


68
69
70
71
72.
73.
74.
75.
76.
77


78
79
80
81
82
83
84
85
86
87

LONGITUDE

DE

L'OBSERVATOIRE DE COINTE

PAR

M. LE PAIGE,

DIRECTEUR DE L'OBSERVATOIRE.

LONGITUDE

DE

L'OBSERVATOIRE DE COINTE.

En attendant que nous puissions déterminer par des observations astronomiques effectuées simultanément à Uccle et à Cointe, la différence de longitude entre les deux Observatoires, nous croyons utile de faire connaître la valeur que nous avons obtenue de cette constante par un transport de l'heure et par quelques observations de culminations lunaires.

Le 2 août 1899, le chronomètre Hohwü 605 appartenant à l'Institut astro-physique a été comparé à la pendule fondamentale d'Uccle par M. Bijl.

L'avance du chronomètre sur la pendule était de $3^m05.860$.

Le même chronomètre a été comparé le 1er août à 5^h41, temps de la pendule Dent de l'Observatoire de Cointe, et de nouveau le 3 août à 7^h45, temps de la même pendule.

L'état de la pendule Dent a été déterminé le 21 juillet 1899 à 15^h30, temps sidéral.

La correction de la pendule Dent était $-4^s209 \pm 0^s008$.

Les observations du 1er, du 2 et du 3 août à l'Observatoire de Cointe ont été trop peu nombreuses, mais elles sont suffisantes pour s'assurer que l'état de l'instrument des passages n'avait guère varié; la marche de la pendule a été déterminée par les différences des temps d'observations des mêmes étoiles faites le 31 juillet et le 3 août.

La somme des constantes $n + c$ a été déterminée le 31 juillet par les passages de δ urs. minoris et 51 Cephei.

On a trouvé

$$n + c = 1^s193.$$

Le 2 août, par α urs. minoris et δ urs. minoris

$$n + c = 1^s191.$$

Le 3 août, par α urs. minoris et δ urs. minoris

$$n + c = 1^s193.$$

La différence des constantes i et c a été déterminée par la visée au bain de mercure.

31 juillet.	$i - c = 87^d06$
1er août	$i - c = 88\ 97$
3 août	$i - c = 86\ 93$

1 division = 0^s01559.

La collimation instrumentale ne varie presque pas.

Le 29 juillet, le fil sans collimation était à la division $49^r96.06$; le 14 août à $49^r95.65$.

La marche de la pendule Dent du 31 juillet au 3 août, déterminée par les passages des mêmes étoiles, était de 2^s317, soit un retard diurne de 0^s772.

État de la pendule Dent le 31 juillet à 15^h30	$- 4^s209$
Marche du 31 juillet au 1er août 5^h41 en 0^j583 . . .	0 450
État de la pendule Dent à 5^h41. . .	$- 3^s759$

Temps sidéral . . .	$5^h40^m56^s241$
Chronomètre Hohwü .	5 39 16 500
Correction. .	$+ 1^m39^s741$

État de la pendule Dent le 31 juillet	$- 4^s209$
Correction le 3 août à 7^h45 en 2^j08.	1 606
État. . .	$- 2^s603$

Temps sidéral	$7^h44^m57^s397$
Chronomètre Hohwü .	7 43 12 500
Correction Hohwü. .	1^m44^s897

Marche du chronomètre Hohwü en 2^j006	5^s156
Marche diurne.	2 577
Correction de marche du 1er août 5^h41 au 2 août 9^h15 en 1^j125.	2 899
État du chronomètre.	+ $1^m39\,741$
	1^m42^s640
Comparaison d'Uccle.	3 05 860
	4^m48^s500

Pour déterminer l'état de la pendule le 31 juillet, j'ai fait usage des ascensions droites empruntées au *Nautical Almanach*. A Uccle, on fait usage du *Berliner Jahrbuch*. Il faut donc tenir compte de la différence entre ces éphémérides.

La comparaison des ascensions droites des étoiles employées le 31 juillet, tirées des deux éphémérides donne, en moyenne,

$$\text{Æ NA} - \text{Æ BJ} = -0^s038.$$

La différence de longitude est donc

$$\begin{array}{rr} & 4^m48^s500 \\ + & 038 \\ \hline & 4^m48^s538 \end{array}$$

Par une série de comparaisons faites au chronomètre de poche, M. Folie avait trouvé

$$\text{Cointe-Bruxelles} = 4^m46^s6.$$

Mais on a

$$\text{Bruxelles-Uccle} = 2^s000.$$

Les deux déterminations sont absolument concordantes.

Comme on a

Uccle-Paris	8^m05^s800
Cointe-Uccle	4 48 538
Cointe-Paris	12^m54^s338
Uccle-Greenwich . . .	17^m26^s9
Cointe-Uccle	4 48 538
Cointe-Greenwich . . .	22^m15^s438

J'ai également, par les culminations lunaires, déterminé la longitude de Cointe par rapport à Paris, en employant les Tables de la Connaissance des Temps; j'emprunte aux registres les résultats suivants :

25 juillet 1898	12^m900
9 septembre 1898	12 891
24 octobre 1898.	12 881
19 novembre 1898.	12 881
17 janvier 1899.	12 910
17 février 1899.	12 920
22 avril 1899	12 902
16 août 1899.	12 923
9 novembre 1889.	12 886
	12^m899
	$= 12^m53^s96 \pm 0^s3$
Paris-Uccle.	8 5 800
	4^m48^s16

Il semble donc que l'on puisse provisoirement s'en tenir à la valeur

4^m48^s5.

LES

PERMUTATIONS CARRÉES

DE BASE 6

PAR

Gaston TARRY

LES

PERMUTATIONS CARRÉES

DE BASE 6

Les écussons. — Dans les 36 cases d'un échiquier de base 6, répartissons les 6 premiers chiffres, répétés chacun 6 fois, de manière que dans chaque rangée et dans chaque colonne on trouve les 6 chiffres.

L'abaque ainsi obtenu sera une *permutation carrée* de base 6.

Considérons les permutations d'un couple de rangées ou de colonnes.

La substitution qui a pour effet de remplacer l'une des permutations par l'autre est circulaire, ou composée de plusieurs substitutions circulaires.

Nous représenterons la relation existant entre ces deux permutations :

1° Par α, quand la substitution qui les identifie est composée de trois transpositions;

2° Par β, quand la substitution est composée d'une transposition et d'un cycle de 4 chiffres;

3° Par γ, quand la substitution est composée de deux cycles de 3 chiffres;

4° Par δ, quand la substitution est circulaire.

Il n'y a pas d'autres combinaisons.

Construisons une permutation carrée quelconque :

1 2 3 4 5 6
2 1 4 3 6 5
3 5 1 6 4 2
4 3 6 5 2 1
5 6 2 1 3 4
6 4 5 2 1 3

Les relations entre la première rangée et chacune des cinq autres sont respectivement α, β, δ, δ, β.

La suite α, β, δ, δ, β figure la relation de la première rangée avec les autres.

A chaque rangée correspond de la sorte une suite.

Plaçons ces suites les unes au-dessous des autres. Pour la permutation considérée, nous aurons le tableau suivant :

α β δ δ β
α δ γ γ δ
β δ δ δ γ
δ γ δ γ δ
δ γ δ γ δ
β δ γ δ δ

Dans ce tableau des cycles, écrivons les lettres par ordre alphabétique dans chaque rangée, puis disposons aussi les rangées dans l'ordre alphabétique.

Le nouveau tableau sera le *schéma* des rangées.

En opérant de même pour les colonnes, leurs suites étant placées en rangées, nous obtiendrons le schéma des colonnes.

J'appelle *écusson* ce couple de schémas.

Pour la permutation qui nous occupe, on a cet écusson :

α β β δ δ $\quad$ β β γ δ δ
α γ γ δ δ $\quad$ β β γ δ δ
β γ δ δ δ $\quad$ β β γ δ δ
β γ δ δ δ $\quad$ β β γ δ δ
γ γ δ δ δ $\quad$ β δ δ δ δ
γ γ δ δ δ $\quad$ β δ δ δ δ

Chaque permutation carrée se trouve ainsi caractérisée par un écusson.

Une question se pose immédiatement.

Combien existe-t-il de schémas et d'écussons dans les permutations carrées de base 6 ?

Il y a 16 schémas. Les voici :

I

α α α γ γ
α α α γ γ
α α α γ γ
α α α γ γ
α α α γ γ
α α α γ γ

II

α α β γ δ
α α β γ δ
α α β γ δ
α α β γ δ
α β β δ δ
α β β δ δ

III

α α α α α
α γ γ γ γ
α γ γ γ γ
α γ γ γ γ
α γ γ γ γ
α γ γ γ γ

IV

α α α δ δ
α β β γ γ
α β β γ γ
α β β γ γ
β β β γ δ
β β β γ δ

V

α β β δ δ
α β β δ δ
α β β δ δ
α β β δ δ
α β β δ δ
α β β δ δ

VI

α α α γ γ
α γ γ δ δ
α γ γ δ δ
α γ γ δ δ
γ γ δ δ δ
γ γ δ δ δ

VII

α γ γ δ δ
α γ γ δ δ
α γ γ δ δ
α γ γ δ δ
α γ γ δ δ
α γ γ δ δ

VIII

α β β β β
α δ δ δ δ
β β β γ δ
β β β γ δ
β β β γ δ
β β β γ δ

IX

α β β β β
α δ δ δ δ
β γ γ γ δ
β γ γ γ δ
β γ γ γ δ
β γ γ γ δ

X

α β β δ δ
α γ γ δ δ
β γ δ δ δ
β γ δ δ δ
γ γ δ δ δ
γ γ δ δ δ

XI

β β β β β
β β β β β
β β β β β
β β β β β
β β β β β
β β β β β

XII

β β β γ γ
β β β γ γ
β β β γ γ
β β β γ γ
β β β γ γ
β β β γ γ

XIII

β β β δ δ
β β β δ δ
β β β δ δ
β β β δ δ
β δ δ δ δ
β δ δ δ δ

XIV

β β γ δ δ
β β γ δ δ
β β γ δ δ
β β γ δ δ
β δ δ δ δ
β δ δ δ δ

XV

β β δ δ δ
β β δ δ δ
β γ δ δ δ
β γ δ δ δ
β γ δ δ δ
β γ δ δ δ

XVI

γ γ δ δ δ
γ γ δ δ δ
γ γ δ δ δ
γ γ δ δ δ
γ γ δ δ δ
γ γ δ δ δ

Il y a 16 écussons, qu'il suffit de représenter par leurs couples de schémas :

1	2	3	4
I + I	II + II	III + XI	IV + V
5	6	7	8
V + V	VI + XII	VII + VII	VIII + VIII
9	10	11	12
IX + XIII	X + XIV	XI + XI	XII + XII
13	14	15	16
XIII + XIII	XIV + XIV	XV + XV	XVI + XVI

Quand les deux schémas d'un écusson sont différents, on peut les alterner, puisque cette transposition revient à déplacer le spectateur de manière que les rangées lui paraissent des colonnes et réciproquement.

Les permutations types. — Nous disons que deux permutations carrées sont *semblables*, lorsqu'elles peuvent se transformer l'une en l'autre par des permutations de rangées, de colonnes et de chiffres.

Réunissons dans une même famille toutes les permutations carrées semblables et choisissons-en une qui sera le *type* de cette famille.

Avec l'aide des écussons, j'ai trouvé rapidement que le nombre de familles était égal à 17, et j'ai choisi pour les représenter les 17 types suivants :

1 Écusson 1	**2** Écusson 2	**3** Écusson 3	**4** Écusson 4
1 2 3 4 5 6	1 2 3 4 5 6	1 2 3 4 5 6	1 2 3 4 5 6
2 1 4 3 6 5	2 1 4 3 6 5	2 1 4 3 6 5	2 1 4 3 6 5
3 5 1 6 2 4	3 5 1 6 2 4	3 5 1 6 2 4	3 5 1 6 2 4
4 6 2 5 1 3	4 6 2 5 1 3	4 6 5 1 3 2	4 6 5 1 3 2
5 3 6 1 4 2	5 4 6 1 3 2	5 4 6 2 1 3	5 3 6 2 4 1
6 4 5 2 3 1	6 3 5 2 4 1	6 3 2 5 4 1	6 4 2 5 1 3

5 Écusson 5

1 2 3 4 5 6
2 1 4 3 6 5
3 5 1 6 4 2
4 6 5 2 1 3
5 3 6 1 2 4
6 4 2 5 3 1

6 Écusson 6

1 2 3 4 5 6
2 1 4 3 6 5
3 4 5 6 1 2
4 5 6 1 2 3
5 6 1 2 3 4
6 3 2 5 4 1

7 Écusson 7

1 2 3 4 5 6
2 1 4 3 6 5
3 4 5 6 1 2
4 3 6 5 2 1
5 6 1 2 3 4
6 5 2 1 4 3

7bis Écusson 7

1 2 3 4 5 6
2 1 4 3 6 5
3 4 5 6 1 2
4 3 6 5 2 1
5 6 1 2 4 3
6 5 2 1 3 4

8 Écusson 8

1 2 3 4 5 6
2 1 4 3 6 5
3 5 1 6 4 2
4 6 5 1 2 3
5 3 6 2 1 4
6 4 2 5 3 1

9 Écusson 9

1 2 3 4 5 6
2 1 4 3 6 5
3 5 1 6 4 2
4 6 5 1 2 3
5 4 6 2 3 1
6 3 2 5 1 4

10 Écusson 10

1 2 3 4 5 6
2 1 4 3 6 5
3 4 5 6 1 2
4 6 1 5 2 3
5 3 6 2 4 1
6 5 2 1 3 4

11 Écusson 11

1 2 3 4 5 6
2 1 4 5 6 3
3 4 1 6 2 5
4 5 6 1 3 2
5 6 2 3 1 4
6 3 5 2 4 1

12 Écusson 12

1 2 3 4 5 6
2 3 1 5 6 4
3 1 2 6 4 5
4 5 6 1 3 2
5 6 4 3 2 1
6 4 5 2 1 3

13 Écusson 13

1 2 3 4 5 6
2 1 4 5 6 3
3 4 1 6 2 5
4 5 6 1 3 2
5 6 2 3 4 1
6 3 5 2 1 4

14 Écusson 14

1 2 3 4 3 6
2 1 4 5 6 3
3 4 2 6 1 5
4 5 6 3 2 1
5 6 1 2 3 4
6 3 5 1 4 2

15 Écusson 15

1 2 3 4 3 6
2 1 4 5 6 3
3 4 2 6 1 5
4 6 5 2 3 1
5 3 6 1 2 4
6 5 1 3 4 2

16 Écusson 16

1 2 3 4 5 6
2 3 1 5 6 4
3 1 2 6 4 5
4 6 5 2 1 3
5 4 6 3 2 1
6 5 4 1 3 2

Comme on le voit, chaque famille possède son écusson propre, à l'exception des familles 7 et 7*bis*, qui ont le même écusson.

La considération des écussons permet de résoudre facilement le problème suivant :

Étant donnée une permutation carrée quelconque, trouver sa famille et effectuer les changements nécessaires pour l'identifier au type de cette famille.

On forme son écusson qui désigne la famille. Les deux tableaux de ses cycles serviront de guides pour les changements des rangées et des colonnes, puisque les tableaux cycliques doivent être amenés à être identiques à ceux du type. Les changements indiqués étant opérés, il suffira le plus souvent de permuter les chiffres de manière à remplacer la première rangée de la nouvelle permutation carrée par celle du type. Dans le cas particulier où l'écusson porte le n° 7, on verra aisément auquel des types 7 ou 7bis la permutation carrée doit être identifiée.

Comme exemple, prenons la permutation déjà examinée :

1 2 3 4 5 6
2 1 4 3 6 5
3 5 1 6 4 2
4 3 6 5 2 1
5 6 2 1 3 4
6 4 5 2 1 3

Son écusson X + XIV la place dans la famille 10.
Elle peut donc être identifiée au type 10 :

1 2 3 4 5 6
2 1 4 3 6 5
3 4 5 6 1 2
4 6 1 5 2 3
5 3 6 2 4 1
6 5 2 1 3 4

Nous obtiendrons, en changeant l'ordre des rangées,

2 1 4 3 6 5
1 2 3 4 5 6
4 3 6 5 2 1
6 4 5 2 1 3
3 5 1 6 4 2
5 6 2 1 3 4

puis l'ordre des colonnes :

$$\begin{matrix} 6 & 5 & 2 & 1 & 4 & 3 \\ 5 & 6 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 5 \\ 1 & 3 & 6 & 4 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 3 & 5 & 1 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 2 & 1 \end{matrix}$$

Enfin, multiplions toutes les permutations des rangées par la substitution $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, et nous tomberons sur le type 10.

Si l'écusson s'était présenté sous la forme alternée XIV + X, il aurait fallu commencer par transformer les rangées en colonnes et réciproquement.

Application au problème des 36 officiers. — Pour résoudre ce problème, il faudrait pouvoir superposer case à case deux permutations carrées de base 6, de telle manière que chaque chiffre de l'une d'elles soit superposé aux 6 chiffres de l'autre.

Dans les recherches, il sera toujours permis de changer l'ordre des rangées et des colonnes d'une superposition, puis de permuter isolément les chiffres dans chacune des permutations carrées. En effet, si la superposition résout le problème, toutes celles obtenues par les changements indiqués fourniront des solutions, et réciproquement, si la superposition ne résout pas le problème, il en sera de même des transformées.

Le problème ne peut donc être résolu que si l'on parvient à superposer à l'un des 17 types une seconde permutation carrée, de manière à satisfaire aux conditions exigées, et cela suffit.

Dans la seconde permutation carrée, nous ne pouvons plus changer l'ordre des rangées et des colonnes, mais on demeure libre de permuter les chiffres. En conséquence, on pourra toujours représenter sa première rangée par 1, 2, 3, 4, 5, 6.

En employant cette méthode, j'ai constaté que le problème ne comportait pas de solution.

Il faut moins de 24 heures de calculs bien dirigés pour obtenir ce résultat. La démonstration de l'impossibilité de résoudre le problème des 36 officiers, nécessite moins de temps que la recherche du nombre des dispositions rectilignes des dés d'un jeu de dominos allant jusqu'au double-huit.

ANATOMIE COMPARÉE

DU

CHLOROPHYTUM ELATUM (Ait.)

ET DU

TRADESCANTIA VIRGINICA L.

PAR

A. GRAVIS et P. DONCEEL.

INTRODUCTION

Dans un mémoire publié récemment (1), l'un de nous a décrit l'organisation du *Tradescantia virginica* considéré comme type de la famille des Commélinées. Nous avons pensé qu'il n'était pas sans intérêt d'étudier par la même méthode une plante appartenant à une famille voisine. Notre choix s'est porté sur le *Chlorophytum elatum*, parce que cette espèce a un facies assez semblable à celui du *Tradescantia virginica*. Nous croyons, en effet, que la comparaison de plantes de même port, appartenant à des familles différentes, facilitera la recherche des caractères héréditaires propres à ces familles. La recherche des caractères d'adaptation, au contraire, se fera de préférence au moyen d'espèces d'une même famille, vivant dans des conditions différentes et possédant par suite des ports différents.

(1) A. Gravis, *Recherches anatomiques et physiologiques sur le* Tradescantia virginica *L. au point de vue de l'organisation générale des Monocotylées et du type Commélinées en particulier,* dans les Mémoires in-4° de l'Académie royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique, t. LVII, 1898. — 304 pages, 27 planches.

Le *Chlorophytum elatum* (Ait.) est une Liliacée de l'Afrique australe qu'on peut cultiver en serre froide et même dans les jardins en été. Dans les cultures ornementales, on donne d'ordinaire la préférence à la variété *variegatum* Hort. C'est une espèce très voisine du *C. comosum* (Thunb.). Cette dernière, très commune dans les serres et les appartements, est plus souvent désignée sous les noms de *Hartwegia comosa* Nees., de *Phalangium viviparum* Reinw. ou *Cordyline vivipara* Hort.

Nous nous proposons de faire connaître l'organisation générale du *Chlorophytum elatum,* puis d'établir une comparaison entre cette plante et le *Tradescantia virginica,* la structure de cette dernière espèce étant supposée connue du lecteur. Toutefois un résumé en sera donné dans la seconde partie de ce travail pour faciliter les rapprochements et mettre en relief les différences anatomiques.

L'étude du parcours des faisceaux dans le *Chlorophytum* a présenté de sérieuses difficultés à cause du grand nombre de faisceaux, de leur grande longueur, de leurs anastomoses, de l'insertion des bourgeons et de l'insertion des racines adventives. L'extrême abondance des raphides d'oxalate de chaux a été également un obstacle très réel. De longues séries de coupes transversales successives, fixées au porte-objet avec de l'Agar-Agar [1], ont été traitées par l'eau de javelle, puis par l'acide chlorhydrique pour détruire l'oxalate; après neutralisation, les

[1] A. Gravis, *Fixation au porte-objet des coupes faites dans la celloïdine.* (Archives de l'Institut botanique de l'Université de Liége, vol. I.)

coupes ont été colorées et montées soit à la gélatine glycérinée, soit au baume de Canada. Certaines séries comprenaient plus de deux cent cinquante coupes faites dans un gros rhizome. La largeur de ces sections a nécessité l'emploi du microscope à grand champ de Nachet, et même parfois de l'appareil à projections d'Edinger. Les dessins d'ensemble ont été faits sur papier à calquer, de telle façon que deux dessins successifs devenaient aisément superposables : les faisceaux notés dans l'un de ces dessins pouvaient ainsi être retrouvés et notés dans l'autre.

Ces recherches ont exigé beaucoup de temps. Elles nous ont permis de suivre les traces foliaires dans toute leur étendue et de les désigner d'une façon précise, comme on le reconnaîtra dans les figures 3 à 6 (1) et 41 à 43. Elles nous ont permis aussi de reconnaître la présence des faisceaux gemmaires dont l'intervention dans la constitution des tiges a été généralement méconnue jusqu'ici.

Certaines portions de coupes levées à un fort grossissement ont donné lieu à de longues et minutieuses comparaisons. Ce travail est résumé dans le tracé de la figure 7 qui reproduit le parcours de quelques faisceaux pris comme exemple.

Pour le *Chlorophytum*, comme pour le *Tradescantia*, nous avons cherché à établir le type structural complet d'après diverses portions et divers individus, afin d'éliminer les dispo-

(1) Dans les figures 4, 5 et 6, les faisceaux foliaires sont marqués par un chiffre qui désigne le numéro de la feuille dont ces faisceaux proviennent. Le médian de chaque trace foliaire est indiqué par M.

sitions accidentelles et les erreurs d'observation. Nous pensons donc que nos descriptions ne s'appliquent pas à tel ou à tel cas particulier réalisé dans un fragment, mais qu'elles font connaître le plan idéal de l'ensemble de l'organisation de l'espèce étudiée.

ANATOMIE COMPARÉE

DU

CHLOROPHYTUM ELATUM (Ait.)

ET DU

TRADESCANTIA VIRGINICA L.

PREMIÈRE PARTIE

ANATOMIE DU *CHLOROPHYTUM ELATUM* (Ait.)

CARACTÈRES EXTÉRIEURS.

Le *Chlorophytum elatum* est une plante à végétation continue dont les tiges primaires sont disposées en sympode. Chacune d'elles comprend deux régions : la première porte généralement de huit à douze feuilles végétatives (1), séparées par des entre-nœuds très courts; elle mesure de 15 à 20 millimètres de longueur; elle est à peu près cylindrique et son diamètre est ordinairement de 10 à 12 millimètres. La seconde région est une hampe portant de vingt à vingt-cinq bractées séparées par de longs entre-nœuds; elle mesure souvent $0^{m},75$ de longueur; elle a la forme d'un cône longuement effilé; son diamètre étant

(1) Sous le nom de « feuilles végétatives », nous désignons les feuilles les plus développées, celles qui sont chargées des fonctions de transpiration et d'assimilation, par opposition aux feuilles plus ou moins réduites et transformées, comme la préfeuille, les feuilles souterraines, les feuilles pérulaires, les bractées, etc.....

de 4 millimètres dans la partie inférieure et à peine de 1 millimètre vers le sommet.

L'ensemble des régions végétatives des tiges successives forme un rhizome sympodique, rampant à la surface du sol. Sur la partie ancienne de ce rhizome, au milieu des débris des feuilles mortes, on peut retrouver de distance en distance les traces des hampes flétries. Des racines adventives naissent assez tardivement sur cette partie du rhizome (fig. 1 : rhizome complètement dépouillé de ses feuilles montrant quatre pousses disposées en sympode ; la dernière est encore à l'état de bourgeon de remplacement).

Il y a un bourgeon à l'aisselle de chaque feuille, excepté dans l'aisselle de la préfeuille : le bourgeon qui doit continuer le rhizome est très vigoureux et se développe de bonne heure ; les autres sont d'autant plus petits qu'ils sont situés plus près de la base de la pousse, et restent latents. Exceptionnellement un d'entre eux se développe et provoque ainsi la ramification du rhizome.

Dans la partie inférieure de la hampe, les bourgeons situés tout en bas demeurent latents, tandis que ceux situés un peu plus haut se développent ordinairement en axes secondaires garnis de bractées. Dans la partie supérieure de la hampe, au contraire, de même que le long des axes secondaires de l'inflorescence, des fleurs disposées en cyme s'observent dans l'aisselle des bractées. Après la floraison, on voit souvent des pousses feuillées se développer le long de la hampe. Lorsque celle-ci se renverse, ces pousses, mises au contact du sol, ne tardent pas à se fixer par des racines adventives. Dans les cultures, on a fréquemment recours à ce procédé de propagation (1).

Nous nous occuperons successivement de la région qui porte les feuilles végétatives, c'est-à-dire du rhizome, puis de la région garnie de bractées, c'est-à-dire de la hampe, de ses ramifications et des cymes.

(1) Le même phénomène est plus marqué encore dans le *Chlorophytum comosum* (Thunb.) et a valu, à cette dernière espèce, la dénomination de vivipare, que certains auteurs lui ont donnée.

CHAPITRE PREMIER.

LE RHIZOME.

§ 1. — PARCOURS DES FAISCEAUX.

A. *Composition d'une trace foliaire.*

Bien que la feuille n'ait pas de gaine close, son insertion embrasse toute la circonférence du rhizome. Cette insertion ne se fait pas dans un plan : elle décrit souvent une courbe sinueuse, qui monte et descend assez irrégulièrement (fig. 1). Les faisceaux qui passent d'une feuille dans la tige constituent une trace foliaire. La figure 4 représente une coupe transversale pratiquée vers le haut de la troisième pousse du rhizome reproduit par la figure 1 : les feuilles 1 à 5 ont été rencontrées au niveau de leur gaine; la feuille 6 a été sectionnée au niveau de son insertion; les feuilles 7 et 8 montrent leur trace foliaire enfoncée déjà dans la tige.

Les faisceaux d'une trace foliaire sont toujours assez nombreux et peu différents les uns des autres. Il y a lieu cependant de reconnaître un faisceau *médian*, deux faisceaux *latéraux* et un nombre variable de faisceaux *marginaux*. Ils se distinguent les uns des autres par leur taille : le médian est le plus gros, les latéraux sont un peu moins forts, les marginaux sont d'autant plus petits qu'ils sont plus éloignés du médian (1).

La notation des faisceaux d'une trace foliaire est donc la suivante :

etc. m^{VI} m^{V} m^{IV} m''' m'' m' m LML m m' m'' m''' m^{IV} m^{V} m^{VI} etc.

(1) Si à première vue les faisceaux d'une même trace foliaire paraissent parfois presque tous semblables, un examen attentif permet toujours de fixer exactement la position du médian par rapport au bourgeon axillaire. Normalement le nombre des faisceaux d'une trace foliaire est impair; lorsqu'il est pair, cela provient de ce qu'il existe un petit faisceau marginal en plus à l'un des bords de la feuille.

Cette notation est pleinement justifiée par l'examen de la nervation de la feuille : la coupe transversale pratiquée en un point quelconque du limbe montre, en effet, un faisceau médian de chaque côté duquel existe une série de faisceaux dont la grosseur diminue très lentement à mesure qu'on s'écarte du médian pour se rapprocher des bords. Il n'y a jamais de petits faisceaux intercalés entre deux plus gros (fig. 8, coupe transversale au milieu du limbe). D'autre part, le médian est le plus long de tous les faisceaux ; les deux latéraux se prolongent jusqu'à une petite distance du sommet de la feuille où ils se jettent sur le médian ; les marginaux sont d'autant plus courts qu'ils sont plus éloignés du médian. En remontant le long des bords d'une feuille rendue transparente (fig. 9), on constate, en effet, que les faisceaux se terminent par une anastomose dans l'ordre indiqué par leur exposant :

$$m^{VII}\ m^{VI}\ m^{V}\ m^{IV}\ m'''\ m''\ m'\ m\ (1).$$

B. *Parcours des faisceaux constituant une trace foliaire.*

Les faisceaux d'une même trace foliaire se comportent tous à peu près de la même manière. En les suivant à partir du niveau où ils passent de la feuille dans la tige, on voit ces faisceaux conserver leur individualité sur une étendue variable : à cet état nous les désignerons sous le nom de *faisceaux foliaires*. Ils descendent obliquement, en se dirigeant vers le centre de la tige.

En s'avançant ainsi graduellement vers le centre, les faisceaux foliaires d'une même trace se rapprochent forcément les uns des autres ; ils finissent par se rencontrer entre eux et aussi par rencontrer d'autres faisceaux. Ils perdent peu à peu leur individualité : nous les nommerons alors *faisceaux anastomotiques*. La comparaison des figures 3, 4, 5 et 6 (coupes pratiquées aux niveaux indiqués par la figure 1) fait voir le déplacement des traces foliaires : à mesure qu'elles se rapprochent du centre de

(1) La notation adoptée dans ce travail est conforme à celle proposée pour le *Tradescantia virginica* et admise par MM. Lenfant, Mansion et Sterckx pour les Renonculacées.

la tige, elles deviennent de plus en plus incomplètes par suite de la transformation des faisceaux foliaires en faisceaux anastomotiques.

La longueur des faisceaux foliaires est de quatre à huit segments (1) : les plus courts se trouvent parmi les marginaux, les plus longs sont généralement les latéraux et le médian.

Les faisceaux anastomotiques, dans leur trajet descendant, se ramifient et s'anastomosent de façon à constituer des mailles allongées, dont la direction générale est légèrement oblique de dedans en dehors en descendant.

La figure 7 représente le parcours des faisceaux M, m^{VII} et m' provenant respectivement des feuilles 7, 6 et 5 de la troisième pousse du rhizome représenté par la figure 1. Ces trois faisceaux étaient, dans le rhizome, assez voisins et sensiblement situés dans le même plan radial. Leur parcours a été reconstitué par l'examen de cent cinquante-cinq coupes transversales successives; il a été dessiné tel qu'il serait visible dans une longue coupe radiale du rhizome. En suivant de haut en bas le trajet de ces trois faisceaux, on reconnaît que dans la partie supérieure ces faisceaux sont nettement individualisés comme *foliaires* et inclinés vers le centre de la tige; qu'au contraire, dans la partie inférieure, ils sont *anastomotiques* et inclinés vers la périphérie. Bien qu'il soit très difficile de suivre un même faisceau depuis son entrée dans la tige jusqu'à son retour à la périphérie, nous estimons que ce trajet comprend environ une quinzaine de segments du rhizome.

C. *Comparaison des traces foliaires successives.*

Les divers segments qui font partie du rhizome diffèrent peu les uns des autres. Cependant on constate, dans chaque pousse, une gradation qui va en croissant à partir de la préfeuille jusqu'à l'avant-dernière feuille ; la dernière feuille commence la série décroissante qui se continue par les bractées de la hampe comme nous le verrons plus loin.

(1) Par segment de tige, il faut entendre un nœud et l'entre-nœud sous-jacent.

Étudié à ce point de vue, le rhizome représenté par la figure 1 a fourni les renseignements consignés dans le tableau suivant, qui doit être lu de bas en haut :

	NUMÉROS DES FEUILLES (1 indique la préfeuille de chaque pousse.)	NOMBRE DE FAISCEAUX constituant la trace foliaire de chaque feuille.
Pousse n° 3	8	23
	7	25
	6	24
	5	24
	4	23
	3	23
	2	19
	1	16
Pousse n° 2	10	24
	9	26
	8	25
	7	23
	6	23
	5	23
	4	22
	3	22
	2	21
	1	17
Pousse n° 1	9	21
	8	24
	7	22
	6	22
	5	21
	4	21
	3	20
	2	19
	1	15

De ce que les traces foliaires diffèrent peu d'un segment à l'autre, résulte la grande uniformité de structure qu'on observe dans toute l'étendue du rhizome d'une plante adulte.

D. *Agencement des traces foliaires.*

Les faisceaux qui composent une trace foliaire sont disposés en cercle (fig. 5); toutefois la trace de la feuille qui précède la hampe est rendue elliptique par le développement précoce du bourgeon de remplacement, comme on peut s'en assurer par la comparaison des coupes représentées par les figures 5, 4 et 3.

Les traces foliaires successives sont concentriques (fig. 6). Elles forment donc, dans le rhizome, une série de troncs de cône emboîtés les uns dans les autres; la base de chacun de ces troncs de cône, tournée vers le sommet de la tige, coïncide avec l'insertion d'une feuille.

Dans les parties adultes des gros rhizomes, une section transversale peut rencontrer huit traces foliaires concentriques, les quatre ou cinq externes étant seules complètes (fig. 6 : les faisceaux foliaires y sont désignés par le numéro de la feuille dont ils proviennent).

Les faisceaux anastomotiques, indiqués en noir dans les figures 3 à 6, sont éparpillés entre les faisceaux foliaires; ceux qui occupent le centre proviennent de la hampe. Enfin il existe des faisceaux gemmaires dont la place a été marquée d'une petite croix.

§ 2. — BOURGEON TERMINAL.

La position du faisceau médian de chaque trace foliaire est déterminée par la phyllotaxie. Celle-ci doit être étudiée par une série de coupes transversales successives dans le bourgeon terminal, à cause des torsions qui se manifestent pendant l'accroissement intercalaire. Les premières feuilles de chaque pousse font entre elles un angle voisin de 180°; les dernières

sont séparées par un angle de 120° environ. La divergence foliaire débute donc par une demi-circonférence et se réduit graduellement à un tiers.

Des coupes transversales dans le bourgeon terminal permettent aussi de préciser l'ordre dans lequel se fait la différenciation libéro-ligneuse des faisceaux foliaires. Dans chaque trace foliaire le médian se différencie le premier; la différenciation se manifeste ensuite rapidement dans les autres faisceaux, mais toujours progressivement à partir du médian jusqu'aux deux marginaux les plus éloignés. On ne constate jamais l'intercalation de faisceaux plus jeunes entre deux faisceaux plus âgés. Ceci confirme donc la notation que nous avons donnée aux faisceaux foliaires en nous basant sur leur taille et sur leur mode de terminaison dans la feuille (1).

En procédant à l'examen des coupes transversales successives à partir d'en haut, on voit que le méristème primitif se différencie rapidement et que toute activité génératrice est éteinte, à la périphérie du cylindre central, dans la région du rhizome qui porte des feuilles adultes. Il n'y a donc pas de périméristème.

Des coupes longitudinales de grande étendue ont été pratiquées dans la moitié supérieure du fragment de rhizome représenté par la figure 10. Celle de ces coupes qui est bien radiale fait voir, après éclaircissement et coloration, le sommet végétatif remarquablement large et plat (fig. 11). Le bourgeon terminal contient neuf feuilles non épanouies (*fe* ^{5} à *fe* ^{13}). Dans la partie de la tige qui est encore en voie de développement (8^{me} pousse de la fig. 11), on reconnaît les faisceaux *foliaires* qui descendent des feuilles en se dirigeant vers le centre de la tige, et les faisceaux *anastomotiques* inclinés de dedans en dehors en descendant. Les foliaires correspondant aux feuilles 1 à 9 sont presque tous pourvus de trachées; les foliaires correspondant

(1) Pour tout ce qui concerne la notation des faisceaux, voir le mémoire sur le *Tradescantia virginica*, pp. 64 et 151.

aux feuilles 10 à 13 sont tous procambiaux. Les anastomotiques de la 8^{me} pousse sont également à l'état procambial (1).

Il est à remarquer que dans la partie jeune du rhizome (8^{me} pousse de la fig. 11), l'inclinaison en dedans des faisceaux foliaires venant de feuilles jeunes est encore peu marquée : elle s'accentuera par la suite, lorsque ces jeunes feuilles seront refoulées à l'extérieur du bourgeon par le développement de nouveaux appendices. Au contraire, l'inclinaison en dehors des faisceaux anastomotiques est plus évidente que dans la partie adulte du rhizome : l'accroissement intercalaire des entre-nœuds a évidemment pour effet de redresser les anastomotiques au point de rendre finalement leur déplacement radial peu perceptible.

§ 3. — INSERTION DES BOURGEONS AXILLAIRES.

Les bourgeons axillaires, même les plus petits qui restent toujours latents, se composent de plusieurs feuilles entourant un sommet végétatif. Les faisceaux qui descendent de ces feuilles pénètrent dans la tige mère, c'est-à-dire dans le rhizome producteur des bourgeons : nous les appellerons *faisceaux gemmaires.*

Lorsque le bourgeon se développe ultérieurement, il se produit de nouvelles feuilles dont les faisceaux ne pénètrent plus dans la tige mère, mais se terminent dans la tige même du bourgeon, laquelle est devenue une ramification du rhizome.

Nous n'avons à nous occuper ici que des faisceaux gemmaires définis comme il vient d'être dit. Leur nombre et leur longueur dépendent de la vigueur même du bourgeon axillaire. Très courts et peu nombreux (8 à 10) lorsque le bourgeon est grêle,

(1) Dans la figure 11, les faisceaux déjà différenciés sont représentés en traits continus, les faisceaux procambiaux sont indiqués en pointillé. Pour reconnaître ces derniers, il faut des coupes parfaitement orientées, suffisamment minces, convenablement éclaircies et colorées ; il est nécessaire aussi de détruire au préalable, par l'acide chlorhydrique, les paquets de raphides qui encombrent les tissus.

ils sont au contraire très longs et très nombreux (70 à 80) lorsque le bourgeon est vigoureux. Les bourgeons latents sont dans le premier cas, le bourgeon de remplacement est dans le second.

Les faisceaux gemmaires apparaissent à l'état procambial assez longtemps après les faisceaux foliaires. Ils n'existent pas encore dans la portion la plus jeune du rhizome; mais ils s'observent dans la portion adulte, où ils se trouvent par petits groupes en dedans du faisceau médian de la feuille aisselliére (fig. 4, 5, 6). Leur emplacement a été indiqué par de petites croix dans nos dessins, afin qu'ils ne soient pas confondus avec les faisceaux anastomotiques.

L'ensemble des faisceaux provenant d'un même bourgeon constitue une *trace gemmaire* située dans l'aisselle de la trace foliaire correspondante. Les faisceaux gemmaires descendent dans le rhizome en se dirigeant obliquement vers le centre, comme les faisceaux foliaires. Peu à peu ils s'unissent entre eux et s'anastomosent avec les faisceaux foliaires M, L et *m*. Dans la figure 7, on voit trois faisceaux provenant du bourgeon 7 (indiqués par des lignes pointillées) se jeter sur le faisceau M^7.

§ 4. — INSERTION DES RACINES ADVENTIVES.

Les racines adventives prennent naissance dans la portion du rhizome qui porte des débris de feuilles mortes. A l'endroit où ces racines vont se former, on constate que des recloisonnements tangentiels se sont produits à la périphérie du cylindre central. Il en résulte, sous le parenchyme cortical, une zone étroite et translucide, parce qu'elle ne contient pas d'oxalate de chaux. Dans cette zone, ordinairement assez localisée, se forment çà et là quelques petits cordons procambiaux (fig. 25), qui courent longitudinalement, obliquement ou transversalement. Ils s'unissent aux faisceaux anastomotiques périphériques du rhizome, subissent la différenciation libéro-ligneuse et servent à l'insertion des racines adventives. Ces faisceaux, que nous nommerons *faisceaux radicifères*, s'étalent à la surface du cylindre central et pénètrent plus profondément pour s'irradier à deux ou trois

étages différents (fig. 26, coupe transversale d'un rhizome). La figure 27 est une coupe tangentielle épaisse montrant, par transparence, les faisceaux radicifères à la surface du cylindre central.

Lorsque les racines adventives sont nombreuses, les faisceaux radicifères enveloppent complètement le cylindre central de la tige, et leur ensemble forme ce que M. Mangin a nommé « le réseau radicifère » (1).

§ 5. — HISTOLOGIE.

1. **Les faisceaux.** — Dans un même faisceau, la composition du bois varie notablement aux divers points du parcours.

Dans la première portion de leur trajet descendant, dans celle qui est inclinée de dehors en dedans, les faisceaux possèdent des trachées annelées et des trachées spiralées. Dans la seconde portion, dans celle qui est inclinée de dedans en dehors, ils n'en possèdent pas. Ce caractère permet donc de distinguer les faisceaux dits *foliaires* des faisceaux *anastomotiques* du rhizome. La nature et la disposition des éléments ligneux varient en outre de la façon suivante :

1° Dès qu'il a pénétré dans le cylindre central de la tige, le faisceau foliaire offre l'aspect représenté par la figure 12 : les premières trachées sont étroites et très longuement étirées, comme le témoigne le grand écartement de leurs anneaux et de leurs spiricules (fig. 16); les trachées suivantes sont plus larges et non étirées, comme l'indiquent leurs spiricules à tours rapprochés (fig. 17).

2° Lorsqu'il s'est avancé jusque dans la région centrale, le faisceau foliaire possède, outre des trachées de deux sortes comme précédemment, des vaisseaux situés à droite et à gauche du liber; ils tendent même à le recouvrir en arrière (fig. 13). Ces vaisseaux sont assez courts et fermés en pointe aux deux extrémités; leurs parois, épaisses et sclérifiées, sont garnies de

(1) L. Mangin, *Origine et insertion des racines adventives et modifications corrélatives de la tige chez les Monocotylédones.* [Ann. sc. nat. (Botanique), 6e série, t. XIV, 1882.]

nombreuses ponctuations aréolées (fig. 18). Vues de face, à un très fort grossissement, les ponctuations montrent nettement leur fente oblique; les fentes de deux ponctuations correspondantes sont disposées en croix (fig. 20). En coupe, ces ponctuations sont également très reconnaissables (fig. 21).

3° Lorsque le faisceau anastomotique commence à revenir vers la périphérie, son bois est formé uniquement de vaisseaux aréolés disposés autour du liber (fig. 14).

4° A mesure qu'il se rapproche de la périphérie, le faisceau anastomotique devient moins volumineux (fig. 15).

Dans un même faisceau la différenciation marche de haut en bas : elle est précoce dans toute la partie dite *foliaire* du faisceau et très tardive à l'extrémité inférieure de la partie dite *anastomotique*. Il en résulte que, dans les coupes transversales faites dans la portion du rhizome qui est garnie de feuilles adultes, on voit souvent des faisceaux procambiaux à la périphérie du cylindre central. Ces faisceaux correspondent à l'extrémité inférieure des anastomotiques et ne se différencient complètement qu'au moment de la formation du réseau radicifère, c'est-à-dire à une distance de 20 à 30 millimètres du sommet du rhizome, à un endroit où celui-ci ne porte que des débris de feuilles mortes (1).

(1) Nous avons étudié les éléments ligneux du rhizome du *Chlorophytum*, non seulement par des coupes transversales et longitudinales, mais encore par le procédé trop négligé aujourd'hui de la macération de Schultze.

Il est très rare de rencontrer l'une des extrémités des trachées étroites et étirées (fig. 16); pratiquement il est impossible de voir leurs deux extrémités et par conséquent de les mesurer. Au contraire, on peut assez souvent observer les extrémités des trachées larges non étirées (fig. 17). Nous avons pu, dans quelques cas, mesurer leur longueur qui a été trouvée comprise entre $1^{mm},1$ et $2^{mm},7$.

Les vaisseaux aréolés se dissocient aisément : leur longueur, à part de rares exceptions, est comprise entre $1^{mm},65$ et $2^{mm},45$. La longueur moyenne, calculée d'après quarante observations rigoureuses, est de $2^{mm},2$. Les extrémités de ces vaisseaux sont ordinairement effilées en pointe, parfois tronquées, exceptionnellement bifides ou un peu rameuses.

Nous avons pu constater aussi, dans les macérations, mais tout à fait

2. **Le système fondamental** comprend deux régions :

a) *La région interfasciculaire* est occupée par un parenchyme renfermant de nombreuses cellules à raphides. Ces cellules ont

exceptionnellement, des éléments fermés aux deux extrémités, possédant des ponctuations scalariformes dans leur portion médiane, et des ponctuations aréolées ou des anneaux d'épaississement dans leurs portions terminales. Ce sont probablement des vaisseaux situés au contact des trachées.

Les vaisseaux du Chlorophytum ne montrent jamais de distance en distance ni étranglements ni cercles résultant de la résorption des cloisons transversales des cellules vasculaires superposées. Aussi serait-on disposé, dès l'abord, à les considérer comme des trachéides. Ce qui nous a décidé à les désigner sous le nom de vaisseaux, ce sont les importantes observations que M. Kny a consignées sous le titre de : « Ein Beitrag zur Entwickelungsgeschichte der Tracheïden ». (Berichten der deutschen botanischen Gesellschaft, Jahrg 1886, Bd IV, H. 7.)

Le savant anatomiste et physiologiste de Berlin a démontré, par une étude attentive de la différenciation des faisceaux secondaires de l'*Yucca aloïfolia*, de l'*Aloe* spec., du *Dioscorea convolvulacea*, du *Dracaena Draco* et de l'*Aletris fragrans*, que les éléments dénommés trachéides dans ces plantes résultent de la fusion de plusieurs cellules. Les cellules du procambium de ces faisceaux ne mesurent que $0^{mm},064$ de longueur. Un grand nombre de cloisons transversales se résorbent de bonne heure sans laisser de traces de leur existence. Cette destruction est bien visible au stade représenté par la fig. 2 de la pl. XIV. Les parois longitudinales s'épaississent ensuite et se couvrent de ponctuations. A l'état adulte, les éléments ligneux des faisceaux secondaires mesurent en moyenne $1^{mm},69$ de longueur; leurs extrémités sont presque toujours effilées, plus rarement tronquées ou un peu ramifiées; il ne subsiste aucune trace des cloisons transversales résorbées.

Discutant ensuite la signification qu'il convient d'attribuer aux mots trachéides et vaisseaux, M. Kny pense qu'il faut considérer comme vaisseaux les éléments ligneux résultant d'une fusion de cellules et envisager comme trachéides les éléments ligneux dans lesquels on ne peut reconnaître des cloisons transversales à aucun moment. En conséquence, il croit convenable de désigner sous le nom de « vaisseaux courts » ce qu'on a jusqu'ici appelé trachéides dans les *Yucca, Aloe, Dioscorea, Dracaena* et *Aletris*.

La similitude, à l'état adulte, des éléments ligneux du *Chlorophytum* avec ceux des plantes ci-dessus rappelées, nous permet, semble-t-il, de penser que leur mode de formation est identique et que le nom de vaisseaux peut leur être appliqué.

la même longueur que les cellules non cristalligènes voisines, ou bien elles ont une longueur sensiblement double (fig. 23 et 24). Elles renferment de la gomme coagulable par l'alcool.

Vers la périphérie du cylindre central, les cellules diffèrent à peine, par une taille un peu moindre, de celles de la portion centrale; il n'y a jamais de gaine de sclérenchyme.

b) *La région corticale,* dans la partie la plus jeune du rhizome, n'est que le prolongement, vers le bas, du parenchyme foliaire. Dans ce tissu jeune, des cloisonnements se produisent peu à peu, çà et là, sans jamais se localiser en direction nettement tangentielle et en ordre centripète (1). L'assise la plus profonde de la région corticale, le phlœoterme, n'est nullement différenciée, de sorte qu'à aucun moment et à aucun niveau on ne peut reconnaître une limite nette entre le région corticale et la région interfasciculaire du tissu fondamental (2).

Lorsqu'il a pris tout son développement, le parenchyme cortical du rhizome peut atteindre l'épaisseur de vingt-quatre cellules. Certaines de ces cellules contiennent des raphides d'oxalate de chaux.

Dans la partie la plus vieille du rhizome, il s'est formé, sous l'épiderme, une couche de suber assez épaisse.

3. **L'épiderme** possède de nombreux stomates (une trentaine par millimètre carré).

MODIFICATIONS HISTOLOGIQUES RÉSULTANT DE LA FORMATION DES RACINES ADVENTIVES.

L'insertion des racines adventives se fait, comme il a été dit au paragraphe précédent, par l'intermédiaire de faisceaux radicifères formés dans une zone à recloisonnements tangentiels à

(1) Dans le rhizome du *Tradescantia virginica,* au contraire, il existe un parenchyme cortical interne recloisonné, à développement centripète parfaitement évident (*loc. cit.*, p. 104).

(2) Dans le rhizome du *Tradescantia,* le phlœoterme est différencié en arcs endodermiques au dos des faisceaux périphériques, mais il n'est guère reconnaissable dans l'intervalle entre les faisceaux (*loc. cit.*, p. 105).

la périphérie du cylindre central. Ces faisceaux se différencient assez tardivement : leur bois n'est formé que de vaisseaux aréolés. Le parenchyme interposé entre ces faisceaux conserve toujours une disposition radiale avec cloisons tangentielles bien reconnaissables. Par suite, certaines coupes transversales pourraient faire croire à l'existence d'un périméristème et de faisceaux secondaires semblables à ceux des *Dracaena*.

Dans les parties les plus âgées du rhizome, lorsque les éléments anatomiques du réseau radicifère se sont complètement différenciés, l'action des matières colorantes permet de constater la subérification de certaines cellules situées à la périphérie du cylindre central. Cette modification chimique s'opère d'abord dans les cloisons radiales, mais elle s'étend ensuite à toute la paroi. Les cellules ainsi modifiées forment une assise assez régulière, comme on le voit dans les figures 28 et 29 (coupes transversales) et dans la figure 30 (coupe tangentielle) (1).

L'assise subérisée des vieux rhizomes n'offre pas les caractères d'un endoderme. On pourrait penser qu'elle représente néanmoins un phlœoterme. Cette opinion ne nous paraît pas susceptible de justification, à cause de l'absence complète de délimitation entre l'écorce et le cylindre central du rhizome avant la subérification, comme il a été dit plus haut (p. 20).

Dans certains endroits de nos préparations, les parois subérisées paraissent appartenir aux cellules recloisonnées du parenchyme cortical profond (fig. 28) ; dans d'autres endroits, il semble, au contraire, que les cellules subérisées sont réellement les cellules les plus extérieures du parenchyme recloisonné tangentiellement entre les faisceaux radicifères (fig. 29). Dans le premier cas, elles appartiendraient à l'écorce, dans le second au cylindre central. D'ailleurs, l'origine de cette assise subérisée si tardivement pourrait bien être mixte, et par conséquent sans

(1) Dans les figures 28, 29 et 30, les cellules à parois subérisées, seules colorées par la fuchsine diluée, sont indiquées par une croix ; dans la fig. 30, on remarquera que la forme des cellules du parenchyme cortical profond ne diffère pas sensiblement de celle des cellules subérisées.

rapport avec la différenciation première du parenchyme fondamental de la tige. Quoi qu'il en soit, elle ne mérite pas le nom d'endoderme qu'on serait tenté de lui donner à première vue.

D'autre part, l'existence de l'assise subérisée dont il est question ici est bien certainement liée à la présence du réseau radicifère. Aucune assise colorable par la fuchsine ne peut être décelée dans les parties du rhizome déjà adulte avant l'apparition des racines adventives. C'est seulement après la différenciation complète du réseau radicifère qu'une assise subérisée se manifeste par la fuchsine : les coupes transversales et longitudinales de grande étendue prouvent qu'elle recouvre complètement le réseau radicifère, mais ne s'étend pas au delà. Dans les parties les plus vieilles du rhizome, là où les racines sont nombreuses et rapprochées, l'assise subérisée est continue parce que, en réalité, le réseau radicifère enveloppe complètement le cylindre central : il n'y a alors d'interruption qu'au niveau de la sortie des faisceaux foliaires et de l'insertion des bourgeons axillaires. L'endoderme des racines adventives se raccorde avec l'assise subérisée du rhizome (fig. 26 dans laquelle l'endoderme des racines est indiqué en pointillé, tandis que l'assise subérisée du rhizome est indiquée par un trait interrompu). L'endoderme des racines possède d'ailleurs des caractères tout différents (1).

On remarquera enfin que par sa localisation aussi bien que par son rôle de tissu isolant, l'assise subérisée du *Chlorophytum* rappelle ce qui a été nommé « l'endoderme » dans la tige des Aroïdées; la valeur morphologique pourrait néanmoins être différente dans les deux cas comparés.

(1) Dans les racines jeunes, mais entièrement différenciées cependant, l'endoderme consiste, en effet, en cellules à parois minces, plissées dans une petite portion des cloisons radiales (fig. 31). Dans les racines vieilles, les cellules de l'endoderme présentent des épaississements considérables le long des cloisons radiales et des cloisons internes (fig. 32). Les plissements sont néanmoins reconnaissables dans les coupes tangentielles (fig. 33).

TIGES DÉVELOPPÉES DANS L'OBSCURITÉ.

Dans certaines circonstances particulières, l'aspect et la structure du rhizome subissent quelques modifications dont il est intéressant de dire quelques mots.

Normalement, le rhizome rampe à la surface du sol. Lorsqu'à la suite d'un repiquage il a été enterré à quelques centimètres de profondeur, plusieurs des bourgeons axillaires latents se développent, surtout lorsque le sommet a été endommagé. Les tiges qui résultent de ce développement sont dressées en terre et reviennent ainsi rapidement à la surface. Leurs premiers segments sont longs et grêles, avec des feuilles rudimentaires; les segments suivants sont beaucoup plus courts et plus épais avec des feuilles normales (fig. 34 et 35).

L'entre-nœud ^{2} de la tige représentée par la figure 34 ne mesurait que 4 $^{1}/_{2}$ millimètres de diamètre et ne contenait qu'une centaine de faisceaux. La trace foliaire comprenait dix-sept faisceaux. L'entre-nœud ^{2} de l'autre tige (fig. 35), plus grêle encore, n'avait que 2 $^{1}/_{2}$ millimètres de diamètre; le nombre total des faisceaux était réduit à une trentaine et la feuille ne recevait que onze faisceaux.

Malgré cette réduction de la vigueur des pousses, la composition des traces foliaires, leur agencement et leur parcours différaient peu de ce qui a été dit pour le rhizome normal. Le type d'organisation est resté le même.

Les tiges dont il s'agit ici portaient peu de racines adventives et leur réseau radicifère était très peu développé.

D'autre part, les caractères histologiques se sont montrés beaucoup plus variables. La tige représentée par la figure 34 avait poussé en serre froide comme les autres plantes. Tous ses tissus ressemblaient à ceux de ces dernières. Nous n'avons à signaler que la subérification plus précoce d'une assise entourant le cylindre central. Souvent aussi une subérification semblable se manifestait autour des faisceaux foliaires dans leur trajet à travers l'écorce, trajet rendu plus long par suite de l'accroissement intercalaire considérable des tiges développées sous le sol.

Un tronçon de rhizome conservé à l'obscurité, dans une atmosphère saturée d'humidité, a produit plusieurs tiges axillaires étiolées et très grêles (2^{mm} de diamètre). Dans ces tiges, le parenchyme cortical est nettement limité par un phlœoterme à cellules plissées le long de leurs cloisons radiales. Ce phlœoterme ressemble entièrement à l'endoderme des jeunes racines. Une assise plissée entoure aussi les faisceaux foliaires traversant l'écorce (fig. 38 coupe transversale, fig. 39 coupe tangentielle du phlœoterme).

Enfin la tige de la figure 35 et une autre plus vigoureuse s'étaient développées sur des rhizomes plantés au printemps, en plein air. Dans ces tiges, le phlœoterme formait également une assise très nettement reconnaissable de cellules munies d'épaississements considérables le long des cloisons radiales et des cloisons internes (fig. 37). Cette assise présentait la plus grande ressemblance avec l'endoderme des racines vieilles (voir description ci-dessus p. 22 en note et fig. 32).

En outre, les faisceaux anastomotiques étaient presque tous flanqués de cellules du tissu fondamental à parois épaissies et sclérifiées (fig. 37 F. *a.*). Les faisceaux foliaires possédaient, en plus, un arc d'éléments étroits, fortement sclérifiés en avant des trachées (fig. 36 représentant un faisceau foliaire à un niveau comparable à celui du faisceau de la fig. 13). Dans leur trajet à travers l'écorce, les foliaires sortants étaient parfois revêtus d'une assise cellulaire présentant le même aspect que le phlœoterme (fig. 37 F. *f.*).

En résumé, les premiers segments des tiges développées à l'obscurité, soit sous terre, soit dans l'air humide, sont longs et grêles : leur organisation générale, réduite quant au nombre des faisceaux, appartient néanmoins au même type que celle des tiges normales. La constitution des tissus, au contraire, s'est modifiée d'une façon très sensible. Le phlœoterme s'accuse mieux : il se subérifie de bonne heure, complètement ou seulement le long des plissements des cloisons radiales ; d'autres fois, il se sclérifie. Une assise semblable entoure les foliaires dans leur trajet à travers l'écorce. Divers éléments épaississent et sclérifient leurs parois lorsque les plantes vivent au grand air.

CHAPITRE II.

LA HAMPE.

La hampe est constituée, avons-nous dit déjà, par le prolongement d'une pousse dont les premiers segments entrent dans la constitution du rhizome. On peut y reconnaître deux parties.

La partie inférieure de la hampe comprend six à huit segments, dont les entre-nœuds, assez épais, sont à peu près cylindriques. Les bractées, assez larges et assez longues, possèdent plusieurs nervures : la première en contient souvent quinze ou treize, les suivantes en contiennent respectivement onze, neuf, sept, cinq, trois. Leur divergence phyllotaxique, qui est d'un tiers pour les premières, se réduit à deux cinquièmes environ pour les suivantes. Les bourgeons axillaires restent ordinairement latents; quelques-uns se développent et constituent les axes secondaires de l'inflorescence.

La partie supérieure de la hampe est formée d'une dizaine de segments bien développés, puis d'un grand nombre d'autres encore qui s'atrophient au sommet. Les entre-nœuds sont prismatiques et de plus en plus grêles. Ils forment l'axe de l'inflorescence qui est indéfinie. Les bractées sont petites, étroites et aiguës; leur divergence phyllotaxique égale trois huitièmes. Dans leur aisselle existe une petite cyme florifère.

§ 1. — PARCOURS DES FAISCEAUX.

Au point de vue du trajet des faisceaux, la partie supérieure de la hampe diffère complètement du rhizome; la partie inférieure de la hampe, au contraire, possède des caractères mixtes.

I. Partie supérieure de la hampe.

Les bractées sont insérées sur une faible partie de la circonférence de la tige et ne possèdent qu'une seule nervure. Le faisceau qui passe de la bractée dans la tige perd rapidement

son individualité en se jetant sur un faisceau anastomotique. Il n'y a donc pas de traces foliaires.

Toute la partie de la hampe qui nous occupe ici est parcourue par huit *faisceaux anastomotiques*. A chaque nœud, ils reçoivent à tour de rôle un *faisceau foliaire* dans l'ordre déterminé par la disposition phyllotaxique, laquelle reste constante et égale à trois huitièmes.

La figure 41 représente l'entre-nœud 19 de la hampe; la figure 42 est la coupe du nœud 19; la figure 43 représente dans le bas l'entre-nœud 20, dans le haut la bractée 19 et entre les deux la cyme insérée dans son aisselle. La figure 45 enfin reproduit l'aspect d'une coupe pratiquée beaucoup plus haut, dans l'entre-nœud 26. Ces quatre sections sont orientées de la même manière; dans chacune d'elles, la flèche barbelée indique la position de la bractée prochaine. Toutes montrent huit anastomotiques, marqués A, près desquels on a indiqué les numéros correspondant aux faisceaux des bractées. On y remarquera, en outre, un cercle de petits faisceaux périphériques qui sont des *faisceaux gemmaires*, comme il sera expliqué au paragraphe suivant : on peut en faire abstraction pour le moment.

Le parcours des faisceaux, dans toute la partie supérieure de la hampe, appartient donc à un type remarquablement simplifié et uniforme. On peut le représenter très aisément en supposant la tige fendue longitudinalement et étalée (fig. 46). Les huit faisceaux anastomotiques sont les sympodes de tous les foliaires. Ils descendent parallèlement dans toute la longueur de la hampe; arrivés dans le rhizome, ils s'unissent aux anastomotiques de cet organe et avec eux font lentement retour à la périphérie. Dans la figure 7, on voit un des huit faisceaux anastomotiques de la hampe (indiqué par un trait interrompu) se confondre avec les anastomotiques du rhizome.

II. Partie inférieure de la hampe.

L'organisation est ici intermédiaire entre celle du rhizome et celle de la partie supérieure de la hampe.

Plusieurs faisceaux passent d'une bractée dans la tige : quinze

ou treize au segment le plus bas; neuf, sept, cinq, trois aux segments suivants. Les plus gros faisceaux, c'est-à-dire les faisceaux M et souvent aussi les faisceaux L, gardent leur individualité dans la tige, tandis que les autres faisceaux disparaissent par anastomose. Il y a donc des traces foliaires, mais elles sont plus ou moins incomplètes. En outre, la partie centrale est occupée par les huit anastomotiques qui descendent de l'inflorescence; à la périphérie se montrent des faisceaux gemmaires.

La figure 44 représente la section transversale de l'entre-nœud le plus inférieur de la hampe qui a fourni également les coupes reproduites par les figures 41 à 45. La notation des faisceaux explique suffisamment leur provenance.

§ 2. — INSERTION DES BOURGEONS AXILLAIRES.

I. Partie supérieure de la hampe.

Dans l'aisselle de chaque bractée de la partie supérieure de la hampe se développe de bonne heure une cyme unipare hélicoïde (fig. 40). Cette cyme comprend un axe sympodique très court, une dizaine de bractéoles et autant de fleurs pédonculées (fig. 43) (1).

La section transversale de l'axe sympodique contient une cinquantaine de faisceaux. Les uns proviennent des bractéoles, les autres des pédoncules floraux. En pénétrant dans la hampe, ces faisceaux se comportent différemment : la plupart se dirigent obliquement et se jettent sur les trois faisceaux anastomotiques

(1) Cette section nous montre en bas l'entre-nœud 20 de la hampe, en haut la bractée du nœud 19, entre les deux la cyme insérée à ce même nœud 19. On y remarquera les pédoncules (désignés par des chiffres romains) diamétralement opposés aux bractéoles (marquées en chiffres arabes). Les pédoncules sont des axes d'ordre différent qui se succèdent suivant une hélice régulière; il en est de même des bractéoles qui représentent les préfeuilles de ces axes : il y a donc homodromie. Les pédoncules renferment six faisceaux inégaux; les bractéoles inférieures ne contiennent qu'un seul faisceau, tandis que les supérieures en contiennent de trois à sept.

qui, dans la hampe, sont les plus voisins de l'insertion de la cyme; quelques-uns descendent sans subir d'anastomoses et constituent les petits faisceaux périphériques de la hampe. Dans la figure 42, les petites flèches indiquent comment se fait la terminaison de la majeure partie des faisceaux descendant de l'axe sympodique de la cyme insérée au nœud 19. Les petits faisceaux périphériques marqués *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, qui descendent de la même cyme, se retrouvent dans l'entre-nœud situé au-dessous (fig. 41). Tous les autres petits faisceaux qui forment un cercle à la périphérie de la hampe sont de même des faisceaux gemmaires provenant de bourgeons situés plus haut, c'est-à-dire des bourgeons 20, 21, 22, 23, etc., la section de la figure 41 ayant été faite dans l'entre-nœud 19 (1).

Parfois l'axe correspondant au pédoncule I se transforme en une pousse feuillée capable de s'enraciner comme il a été dit plus haut dans l'exposé des caractères extérieurs (propagation vivipare). Plus rarement, il en est de même de l'axe correspondant au pédoncule II et les autres pédoncules s'atrophient : il y a alors deux pousses vivipares d'ordre différent dans l'aisselle de la bractée.

II. Partie inférieure de la hampe.

Dans la partie inférieure de la hampe, les bourgeons situés dans l'aisselle des premières bractées restent toujours latents; ceux situés dans l'aisselle des bractées suivantes se développent ordinairement en axes secondaires garnis eux-mêmes de bractées et de cymes. L'insertion de ces axes secondaires de l'inflorescence est identique à celle des cymes sur la hampe décrite plus haut.

(1) Les cymes insérées dans l'aisselle des bractées sont, en somme, des bourgeons, et à ce titre les faisceaux qui passent d'une cyme dans la hampe méritent le nom de faisceaux gemmaires. Dans le rhizome, les traces foliaires sont beaucoup plus importantes que les traces gemmaires; dans la hampe, c'est l'inverse. Dans les figures 42 et 41, les faisceaux gemmaires qui descendent de la cyme insérée au nœud 19 sont teintés en noir.

§ 3. — HISTOLOGIE.

1. **Faisceaux.** — Leur différenciation est précoce, aussi possèdent-ils tous des trachées annelées et des trachées spiralées. Les foliaires et les anastomotiques possèdent, en outre, des vaisseaux scalariformes, mais jamais de vaisseaux aréolés (1). Les gemmaires sont situés contre le phlœoterme ou légèrement enfoncés dans la gaine de sclérenchyme : ils ne possèdent qu'une ou deux trachées.

Contrairement à ce qui a été signalé pour le rhizome, la composition du bois, dans un même faisceau de la hampe, ne varie pas sensiblement aux divers points du parcours; dans les anastomotiques de la hampe, les éléments ligneux n'environnent jamais complètement le liber comme dans le rhizome.

(1) Les vaisseaux scalariformes peuvent être dissociés par la macération de Schultze. Ils sont prismatiques et fermés aux deux extrémités qui sont longuement effilées; leurs faces sont garnies de ponctuations transversales parallèles (fig. 49). Dans l'un des premiers entre-nœuds d'une hampe, nous avons mesuré soixante-dix de ces éléments. Nous avons trouvé leur longueur comprise entre $1^{mm},7$ et $9^{mm},1$ avec une moyenne de $4^{mm},7$.

Sans entrer dans le détail de nos mensurations, nous grouperons en neuf catégories, dans le tableau suivant, les vaisseaux que nous avons rencontrés.

Catégories de vaisseaux. . .	1 à 2 millim.	2 à 3 millim.	3 à 4 millim.	4 à 5 millim.	5 à 6 millim.	6 à 7 millim.	7 à 8 millim.	8 à 9 millim.	9 à 10 millim.
Nombre de vaisseaux	2	8	14	**21**	10	7	4	3	1

On voit clairement que le plus grand nombre des vaisseaux possèdent précisément la longueur moyenne qui est comprise entre 4 et 5 millimètres (nous avons trouvé par le calcul $4^{mm},7$). A mesure qu'ils s'écartent de cette moyenne, les vaisseaux deviennent de plus en plus rares. C'est ce que montre mieux encore la courbe construite d'après les chiffres fournis par le tableau ci-dessus (fig. 50).

On remarquera que cette courbe est légèrement asymétrique. Peut-être cela provient-il de ce qu'elle a été établie au moyen d'un nombre assez restreint de mesures. Nous pensons cependant qu'elle peut être assimilée à une courbe binomiale normale et que, par conséquent, la longueur des vaisseaux est soumise à la loi de Quételet et Galton.

La figure 47 reproduit la structure du faisceau anastomotique 24-32 et du faisceau gemmaire *a* de la figure 41.

2. **Système fondamental.** — a) *La région interfasciculaire* est constituée par du parenchyme méatique avec cellules contenant des raphides. Ces cellules cristalligènes sont quelquefois isolées, plus ordinairement elles sont superposées par séries de deux ou trois, plus rarement de quatre ou cinq; elles ne forment donc jamais de files parcourant sans interruption toute l'étendue des entre-nœuds. Leur longueur est égale à celle des cellules voisines non cristalligènes, ou bien elle est sensiblement égale à la moitié (fig. 51 et 52). Les raphides sont environnées de gomme coagulable par l'alcool.

Vers la périphérie, le parenchyme interfasciculaire passe insensiblement à du sclérenchyme formant une gaine mécanique continue. Dans le haut de la hampe, le sclérenchyme de la gaine est beaucoup moins caractérisé. Par contre, dans le bas de la hampe, certains éléments du parenchyme adossés au liber, plus rarement au bois, ont des parois épaisses et sclérifiées.

b) *La région corticale* comprend ordinairement trois ou quatre assises de cellules à chlorophylle, quelquefois cinq ou six vers le bas de la hampe. Le phlœoterme n'est nullement différencié; il est cependant reconnaissable à sa position : c'est l'assise cellulaire en contact avec la gaine de sclérenchyme.

3. **Épiderme** avec stomates (quinze à vingt par millimètre carré).

SECONDE PARTIE

COMPARAISON DU *CHLOROPHYTUM ELATUM* (Ait.) ET DU *TRADESCANTIA VIRGINICA* L.

CARACTÈRES EXTÉRIEURS.

Chlorophytum elatum. — Chaque pousse primaire comprend deux régions : l'inférieure, persistante, à entre-nœuds courts, produit une préfeuille, puis des feuilles végétatives à gaine courte, à limbe long. La région supérieure, fugace, constitue une hampe à entre-nœuds longs, avec des bractées de plus en plus petites.

L'ensemble des portions inférieures, persistantes, nées les unes des autres par le moyen de bourgeons axillaires de remplacement, forme un rhizome sympodique rampant sur le sol, garni de bourgeons axillaires rudimentaires et presque toujours latents. Le rhizome ne se ramifie donc qu'exceptionnellement. Il produit des racines adventives dont une portion grêle est absorbante, tandis que l'autre, tubérisée, sert au dépôt des substances alimentaires.

La hampe, longue et dressée, porte quelques axes secondaires et des cymes unipares hélicoïdes, pauciflores, pourvues de bractéoles. Des pousses vivipares naissent souvent sur la hampe après la floraison.

Tradescantia virginica. — Chaque pousse primaire comprend trois régions : l'inférieure, persistante, à entre-nœuds courts, produit une préfeuille et quelques feuilles à longue gaine, à limbe nul ou très court. La région moyenne, se détruisant à l'approche de l'hiver, possède de longs entre-nœuds et des

feuilles complètement développées. La région terminale, ou hampe, réduite à un entre-nœud portant deux grandes bractées foliiformes.

L'ensemble des portions inférieures, persistantes, forme un rhizome souterrain, garni de gros bourgeons qui se développent presque tous. Le rhizome est donc très ramifié. Il produit des racines adventives qui fonctionnent d'abord comme organes absorbants, puis comme organes de dépôt, bien qu'elles ne soient pas tubérisées.

La région moyenne des tiges est dressée, aérienne ; plusieurs de ses bourgeons axillaires se développent en tiges secondaires portant des feuilles végétatives et se terminent par une inflorescence, comme la tige primaire.

Les inflorescences sont des cymes unipares scorpioïdes, multiflores, pourvues de bractéoles. Elles peuvent produire, exceptionnellement, des pousses vivipares.

Conclusion. — Les organes végétatifs des deux plantes que nous comparons offrent de grandes ressemblances au point de vue des caractères extérieurs. Les différences un peu notables se réduisent à deux :

1° Dans le Chlorophytum, la région de la tige portant les feuilles végétatives appartient tout entière au rhizome, tandis que dans le Tradescantia, cette région n'est qu'en partie souterraine : elle se redresse et devient aérienne.

2° Dans le Chlorophytum, la hampe est formée d'un grand nombre de segments, portant des bractées de plus en plus rudimentaires et des cymes hélicoïdes nombreuses, tandis que dans le Tradescantia la hampe n'est qu'un entre-nœud portant deux bractées foliiformes et deux cymes scorpioïdes seulement.

Il en résulte qu'au point de vue du parcours des faisceaux, nous devrons comparer le rhizome du Chlorophytum à la partie aérienne du Tradescantia, et que l'organisation spéciale de la hampe du Chlorophytum ne se retrouvera pas chez le Tradescantia.

§ 1. — PARCOURS DES FAISCEAUX (1).

Chlorophytum elatum. — Les feuilles végétatives qui garnissent le rhizome adulte contiennent de treize à vingt-sept faisceaux constituant un nombre égal de nervures parallèles. La section transversale vers le milieu du limbe montre, de part et d'autre du faisceau médian qui est le plus gros, une série de faisceaux dont la taille va en décroissant insensiblement d'une façon régulière. Il n'y a jamais de petits faisceaux intercalés entre deux plus gros. Dans le cas de dix-sept faisceaux, la formule est la suivante :

$m^{VI}\ m^{V}\ m^{IV}\ m'''\ m''\ m'\ m$ LML $m\ m'\ m''\ m'''\ m^{IV}\ m^{V}\ m^{VI}$ (fig. 8).

En suivant ces faisceaux jusqu'au sommet du limbe, on constate que le médian est le plus long; que les deux latéraux se jettent sur le médian près du sommet; que les marginaux sont d'autant plus courts qu'ils sont plus éloignés du médian, et enfin qu'ils se terminent par une anastomose avec le faisceau voisin d'un ordre moins élevé (fig. 9).

En passant de la feuille dans la tige, les faisceaux se comportent tous sensiblement de la même manière : ils constituent une trace foliaire *circulaire*. Ils descendent obliquement en se dirigeant vers le centre de la tige et en se rapprochant les uns des autres. Plus bas ils se rencontrent et s'unissent aussi à des faisceaux voisins.

Après un trajet descendant plus ou moins long, les faisceaux foliaires perdent donc insensiblement leur individualité et passent peu à peu à l'état de faisceaux anastomotiques. Ceux-ci, poursuivant leur parcours vers le bas, se ramifient et s'anastomosent encore de façon à former des mailles allongées dont la direction générale est légèrement oblique de dedans en dehors (fig. 7).

(1) Nous ne nous occuperons ici que du parcours des faisceaux dans les portions de tiges garnies de feuilles végétatives. Un paragraphe spécial sera consacré plus loin au parcours des faisceaux dans la hampe.

Les traces foliaires successives sont *concentriques :* dans une section transversale quelconque du rhizome, on peut en compter ainsi huit plus ou moins complètes. Cette section contient, en outre, de nombreux anastomotiques éparpillés sur toute la surface de la coupe (fig. 3 à 6).

Tradescantia virginica. — Les feuilles végétatives qui garnissent la portion dressée et aérienne des tiges primaires, possèdent de quinze à trente-cinq nervures parallèles. Toutefois, le nombre des faisceaux passant d'une feuille dans la tige ne dépasse pas vingt et un, les autres s'arrêtant dans le limbe ou dans la gaine en se reliant aux faisceaux voisins. Sur la section transversale pratiquée vers le milieu du limbe, on remarque de chaque côté du médian, qui est le plus gros, des faisceaux de taille très différente : ils sont disposés de telle manière que des petits faisceaux se trouvent toujours interposés entre les faisceaux plus gros. Lorsqu'il y a dix-sept faisceaux, la formule est la suivante :

$$m''' \; m'' \; m' \; m'' \; m \; m' \; \mathrm{L} \; i \; \mathrm{M} \; i \; \mathrm{L} \; m' \; m \; m'' \; m' \; m'' \; m'''$$

En suivant ces faisceaux jusqu'au sommet du limbe, on reconnaît que le médian reçoit les deux latéraux près du sommet; que les marginaux *m* et les intermédiaires *i* s'unissent aux latéraux; que les marginaux *m'* se jettent sur les marginaux *m*, les marginaux *m''* sur les *m'*, et ainsi de suite. Tous ces faisceaux sont d'autant plus courts qu'ils appartiennent à un ordre plus élevé. (Voyez Mémoire sur le *Tradescantia virginica*, fig. 199, et comparez à la fig. 9 du présent travail.)

En pénétrant dans la tige, les faisceaux venant d'une même feuille se rapprochent inégalement du centre : les uns s'enfonçant davantage sont dits « internes », les autres restant près de la périphérie sont dits « externes ». La trace foliaire est donc *étoilée.* (Voyez Mémoire sur le *Tradescantia*, fig. 131, 133, 134 136.) La section transversale d'un entre-nœud montre, en outre, des faisceaux anastomotiques nettement localisés : ils sont les

uns internes, c'est-à-dire situés en dedans de la trace foliaire, les autres externes, c'est-à-dire situés en dehors de cette trace.

Après un trajet plus ou moins long descendant dans la tige, les faisceaux foliaires perdent brusquement leur individualité : les foliaires internes se jettent sur les anastomotiques internes, les foliaires externes sur les anastomotiques externes. Tous les déplacements et les anastomoses de faisceaux s'opèrent dans les nœuds; dans les entre-nœuds le trajet est toujours rectiligne (Tradescantia, fig. 129 et 130).

Les traces foliaires successives sont *entrecroisées :* dans une section transversale d'un entre-nœud quelconque, on ne peut en compter que deux, encore la seconde est-elle assez incomplète (1). Quant aux anastomotiques, les internes, toujours peu nombreux, sont groupés au centre, les externes forment un cercle à la périphérie.

Conclusion. — Le parcours des faisceaux est totalement différent dans les deux plantes comparées.

La disposition des faisceaux dans le limbe et leur mode de terminaison au sommet de la feuille présentent un contraste d'autant plus surprenant que la forme, les dimensions et l'aspect des feuilles sont presque identiques dans les deux espèces.

Les traces foliaires sont circulaires et concentriques dans le rhizome du Chlorophytum; elles sont étoilées et entrecroisées dans la tige du Tradescantia. Les faisceaux foliaires du premier passent insensiblement à l'état de faisceaux anastomotiques; dans la seconde, la distinction entre foliaires et anastomotiques est absolue.

Dans le Chlorophytum, les faisceaux foliaires se comportent tous sensiblement de la même manière; les faisceaux anastomotiques sont éparpillés et forment de grandes mailles dirigées obliquement vers l'extérieur en descendant. Dans le Tradescantia,

(1) Dans le *Tinantia* et dans d'autres Commélinées à grosse tige, le nombre des traces foliaires plus ou moins complètes, visibles à un même niveau, est plus considérable.

les foliaires sont les uns internes, les autres externes; il en est de même des anastomotiques qui forment deux groupes distincts, l'un au centre, l'autre à la périphérie, l'un et l'autre à trajet vertical s'anastomosant seulement aux nœuds.

Dans le Chlorophytum, on peut donc dire que le trajet de tous les faisceaux du rhizome présente deux courbures, l'une de dehors en dedans, l'autre de dedans en dehors. Dans le Tradescantia, les faisceaux externes seuls font retour à la périphérie.

§ 2. — BOURGEON TERMINAL.

Chlorophytum elatum. — Les premières feuilles de chaque pousse primaire sont séparées par des angles phyllotaxiques correspondant à une demi-circonférence environ; pour les dernières feuilles végétatives, l'angle est réduit à un tiers de circonférence. Bien que rampant sur le sol, le rhizome ne manifeste pas de dorsiventralité bien apparente.

Dans une trace foliaire du rhizome, aussi bien que dans le limbe d'une feuille, les faisceaux se différencient progressivement à partir du médian jusqu'aux deux marginaux les plus rapprochés des bords; aucun faisceau ne s'intercale plus tard entre les premiers formés.

Pas de périméristème.

Tradescantia virginica. — Les feuilles sont distiques, mais toutes plus ou moins refoulées du côté opposé à la tige mère (fig. 283, 284). La tige présente une dorsiventralité très évidente dans sa partie inférieure, beaucoup atténuée dans sa partie supérieure. Ce fait semble provenir d'une cause mécanique : la pression exercée par la tige mère sur le bourgeon axillaire (1).

Dans une trace foliaire de la tige, aussi bien que dans le limbe d'une feuille, les faisceaux se différencient dans l'ordre

(1) Dans le *Tradescantia fluminensis,* dont les tiges sont rampantes, la dorsiventralité est plus marquée et se manifeste par une certaine asymétrie des traces foliaires et de quelques faisceaux anastomotiques (fig. 143, 144, 147).

suivant : médian, latéraux, marginaux m, intermédiaires i, marginaux m', m'', m''', etc..... Le premier formé est le plus gros, les autres sont de taille de plus en plus réduite ; les petits s'intercalent successivement entre les gros.

Pas de périméristème.

Conclusion. — La dorsiventralité de la tige du Tradescantia ne se retrouve pas dans le Chlorophytum. Cela paraît provenir de ce que les bourgeons axillaires de la première de ces plantes sont fortement comprimés entre la tige mère et la feuille dont la gaine est close et assez longue, tandis que le bourgeon de remplacement de la seconde n'est pas comprimé parce qu'il naît entre une hampe assez grêle et une feuille qui n'a pas de gaine close ; très vigoureux dès le début, le bourgeon de remplacement continue la direction du rhizome, la hampe lui cède la place (fig. 1 et 6).

L'ordre de différenciation des faisceaux confirme les notations qui leur ont été données d'après leur position et leur parcours.

§ 3. — INSERTION DES BOURGEONS AXILLAIRES (1).

Chlorophytum elatum. — Les faisceaux gemmaires sont ceux qui, descendant des premières feuilles d'un bourgeon, pénètrent dans le rhizome. Dès leur entrée dans ce dernier organe, ils forment un groupe situé en dedans des faisceaux de la feuille aisselliére dans le voisinage des LML. Ils se dirigent obliquement vers le centre comme les faisceaux foliaires, puis peu à peu ils s'anastomosent avec ceux-ci (fig. 7, 4 et 5). Le nombre des faisceaux provenant d'un même bourgeon est d'autant plus élevé, et leur trajet dans le rhizome est d'autant plus long que le bourgeon est plus vigoureux. Les gemmaires parcourent toujours l'étendue de plusieurs entre-nœuds.

(1) Il ne sera question dans ce paragraphe que de l'insertion des bourgeons axillaires situés dans l'aisselle des feuilles végétatives. Ceux situés dans l'aisselle des bractées appartiennent à la hampe : leur insertion très spéciale a été décrite p. 27.

Tradescantia virginica. — A la base d'un bourgeon, comme partout ailleurs, il y a des faisceaux internes et des faisceaux externes. Les premiers, en pénétrant dans la tige mère, forment une ceinture gemmaire interne qui entoure les anastomotiques internes de la tige et s'unit avec eux; de même les seconds forment une ceinture gemmaire externe qui enveloppe les anastomotiques externes de la tige et se met en rapport avec eux. Ces deux ceintures sont réunies l'une à l'autre par quelques arcs rayonnants et forment un diaphragme nodal (fig. 122, 132, 135). Les faisceaux gemmaires ne sont donc visibles qu'au nœud : ils ne descendent jamais dans l'entre-nœud au-dessous.

Conclusion. — L'insertion des bourgeons axillaires se fait donc d'une façon totalement différente dans les deux espèces étudiées : la seconde possède des diaphragmes nodaux; la première n'en possède pas.

§ 4. — INSERTION DES RACINES ADVENTIVES.

Chlorophytum elatum. — Des racines adventives apparaissent tout le long du rhizome. Au moment de l'apparition relativement tardive de ces organes, il y a formation à la périphérie du cylindre central du rhizome de faisceaux radicifères rayonnants, lesquels s'unissent aux faisceaux périphériques et à ceux situés un peu plus profondément (fig. 26 à 27).

Tradescantia virginica. — Des racines adventives ne se forment qu'aux nœuds de la portion souterraine des tiges primaires. Leur insertion s'opère par l'intermédiaire de quelques faisceaux radicifères disposés en éventail et s'unissant aux faisceaux périphériques de la tige (fig. 137, 138).

Conclusion. — L'insertion des racines adventives ne présente pas de différence notable dans les deux cas examinés.

§ 5. — HISTOLOGIE.

Chlorophytum elatum. — a) *Faisceaux :* Dans un même faisceau, la composition du bois varie notablement selon le point occupé par le faisceau par rapport au centre de la tige. Aussi, dans le rhizome, l'aspect des faisceaux (à double courbure) se modifie-t-il complètement aux divers niveaux de leur parcours, tandis que dans la hampe l'aspect des faisceaux (à trajet rectiligne) reste constant.

Dans le rhizome, les éléments ligneux sont des trachées annelées, des trachées spiralées, des vaisseaux aréolés longs en moyenne de 2 millimètres environ. Dans la hampe, les faisceaux possèdent tous des trachées, et les vaisseaux, dont la longueur moyenne atteint 4 à 5 millimètres, sont scalariformes au lieu d'être aréolés.

b) *Système fondamental :* La région interfasciculaire est occupée par un parenchyme incolore qui, dans la hampe, passe insensiblement à un anneau de sclérenchyme formant gaine mécanique à la périphérie du cylindre central.

La région corticale, d'ordinaire, ne montre pas de phlœoterme différencié. Dans le rhizome, le parenchyme cortical se recloisonne mais n'affecte pas la disposition rayonnante; une mince couche de suber décortique l'épiderme.

De nombreuses cellules à raphides sont éparpillées dans le parenchyme interfasciculaire, aussi bien que dans le parenchyme cortical. Ces cellules sont courtes, isolées ou superposées en petit nombre; elles contiennent de la gomme; elles ne projettent pas leur contenu lorsque la plante est blessée.

Dans certains milieux de culture, les caractères histologiques sont notablement modifiés : le phlœoterme devient nettement reconnaissable, soit à des plissements subérisés, soit à des épaississements sclérifiés; d'autres éléments du système fondamental et des faisceaux peuvent également se sclérifier.

Tradescantia virginica. — a) *Faisceaux :* L'aspect d'un même faisceau ne se modifie pas aux divers niveaux de son parcours, lequel est rectiligne dans les entre-nœuds. Les éléments ligneux sont des trachées annelées, spiro-annelées ou spiralées et des vaisseaux annelés. Dans la tige aérienne, ces éléments se détruisent de bonne heure dans tous les faisceaux foliaires et anastomotiques internes, et laissent à leur place une lacune aquifère. Dans le rhizome, les éléments ligneux restent intacts, et il n'y a de lacune dans aucun faisceau.

b) *Système fondamental* : La région interfasciculaire est occupée par un parenchyme incolore qui passe insensiblement à une gaine mécanique de sclérenchyme dans la tige aérienne.

Dans la région corticale, le phlœoterme est partiellement différencié dans le rhizome seulement. Cet organe montre, au dos de chaque faisceau périphérique, un petit arc de cellules dont les cloisons radiales sont plissées. Dans le rhizome aussi, le parenchyme cortical profond est recloisonné tangentiellement en direction centripète et affecte par suite une disposition nettement rayonnante; l'épiderme est décortiqué par une mince couche de suber. Dans la tige aérienne, des massifs de collenchyme existent sous l'épiderme qui est persistant.

De nombreuses cellules à raphides existent dans le parenchyme interfasciculaire et le parenchyme cortical. Ces cellules, très longues dans la tige aérienne surtout, sont superposées en files longitudinales occupant toute la longueur des entre-nœuds. Elles contiennent un mucilage abondant et sous pression. Leurs cloisons transversales sont si minces que toutes celles d'une même file se perforent dès que l'une des cellules de la file a été entamée. D'où projection immédiate de mucilage et de raphides à chaque blessure faite à la plante.

Conclusion. — Pour comparer facilement la composition histologique d'une plante à la composition histologique d'une autre, il faudrait pouvoir rapprocher deux coupes parfaitement comparables à tous les points de vue. Le Chlorophytum et le Tradescantia ne satisfont pas à cette condition, parce que la

région garnie de feuilles végétatives appartient au rhizome dans la première de ces plantes, tandis qu'elle appartient à la tige aérienne dans la seconde. Force nous est donc de comparer les principaux tissus séparément, en les considérant dans l'ensemble d'une pousse primaire.

Le bois dans le Chlorophytum contient des trachées et des vaisseaux aréolés ou scalariformes relativement courts; les éléments ligneux ne se détruisent jamais. Dans le Tradescantia, il y a des trachées et des vaisseaux annelés; les gros faisceaux de la tige aérienne présentent une lacune aquifère résultant de la destruction des éléments ligneux.

Le parenchyme cortical interne du rhizome du Tradescantia se distingue par un développement centripète qui se traduit par des rangées rayonnantes de cellules, aboutissant à des arcs endodermiques au dos des faisceaux périphériques.

Le collenchyme n'existe que dans la tige aérienne du Tradescantia.

Les cellules à raphides sont courtes et souvent isolées dans le Chlorophytum; elles sont très longues et disposées en files longitudinales continues dans le Tradescantia.

Enfin il faut noter que les caractères du phlœoterme, la subérification et la sclérification de divers éléments histologiques, varient selon les circonstances où chaque plante s'est trouvée accidentellement.

§ 6. — PARCOURS DES FAISCEAUX DANS LA HAMPE.

Chlorophytum elatum. — Le rhizome porte des feuilles longues et larges, avec des pousses axillaires réduites à l'état de bourgeons latents (hormis la pousse de remplacement). Aussi le rhizome contient-il de nombreux faisceaux foliaires et de nombreux faisceaux anastomotiques; les gemmaires y sont rares et peu développés. La section transversale d'un entre-nœud montre plusieurs traces foliaires circulaires et concentriques.

La partie supérieure de la hampe, au contraire, produit des

bractées courtes et étroites, avec des pousses axillaires vigoureuses, développées en cymes. Les faisceaux de cette partie de la hampe sont peu nombreux : on compte huit anastomotiques dont le trajet est rectiligne, leur retour à la périphérie ne s'opérant que dans le rhizome; quelques-uns des gemmaires se disposent en cercle périphérique, tandis que les autres s'unissent aux anastomotiques. La section transversale d'un entre-nœud n'offre pas de traces foliaires parce que le faisceau de chaque bractée, dès son entrée dans la hampe, se jette sur l'un des anastomotiques (fig. 41, 43, 45 et 46).

La partie inférieure de la hampe présente des caractères mixtes, c'est-à-dire intermédiaires entre ceux de la partie supérieure et ceux du rhizome (fig. 44).

Tradescantia virginica. — La hampe n'est qu'un entre-nœud dont la structure diffère peu de celle des autres entre-nœuds. On y trouve deux traces foliaires correspondant aux deux bractées foliiformes (fig. 290 et 291).

Conclusion. — Dans le Chlorophytum, le parcours des faisceaux de la hampe contraste singulièrement avec celui des faisceaux du rhizome; l'insertion des bourgeons axillaires est également différente. Un tel contraste n'existe pas dans le Tradescantia, parce que la hampe y est réduite à un seul entre-nœud et que les bractées sont foliiformes.

§ 7. — CYMES.

Chlorophytum elatum. — L'inflorescence comprend un grand nombre de cymes unipares, hélicoïdes, pauciflores (fig. 40 et 42).

Tradescantia virginica. — L'inflorescence consiste seulement en deux cymes unipares, scorpioïdes, multiflores (fig. 293 et 294).

Conclusion. — Différence notable.

RÉSUMÉ.

Les deux plantes que nous avons comparées, bien qu'ayant un facies assez semblable et ne présentant aucun genre d'adaptation spécial (voir plus haut, pp. 31 et 32), diffèrent beaucoup l'une de l'autre au point de vue anatomique.

Les traces foliaires sont totalement différentes : circulaires et concentriques dans le rhizome du *Chlorophytum,* elles sont étoilées et entrecoisées dans la tige du *Tradescantia;* le parcours des faisceaux diffère aussi complètement dans les deux cas (pp. 33 à 36). La dorsiventralité du *Tradescantia* ne se retrouve pas dans le *Chlorophytum* (p. 36). L'insertion des bourgeons axillaires offre un contraste complet et bien inattendu (p. 37). L'insertion des racines adventives, au contraire, se fait à peu près de la même manière dans les deux plantes (p. 38).

Celles-ci présentent, en outre, quelques différences histologiques, telles que la formation d'une lacune ligneuse aquifère dans les gros faisceaux de la tige aérienne du *Tradescantia*, le développement centripète du parenchyme cortical interne du rhizome de la même plante et ses très longues cellules à raphides (pp. 39 à 41). La hampe du *Chlorophytum* possède des caractères propres qui en font un organe bien différent de la hampe si peu développée d'ailleurs du *Tradescantia* (p. 41). Les inflorescences sont notablement différentes aussi (p. 42).

Parmi les faits mis en lumière dans ce travail, nous rappellerons encore les suivants : l'organisation du *Chlorophytum* caractérisée par la composition des traces foliaires et le parcours des faisceaux est invariable, quelle que soit la vigueur des axes et des appendices (pp. 9 à 13). Les caractères histologiques, au contraire, sont très notablement influencés par les variations du milieu (pp. 23 et 24). La partie supérieure de la hampe réalise d'une façon très nette le type de structure propre aux axes d'inflorescence, type qui diffère totalement, comme on sait, de

la structure des axes végétatifs (p. 25); la partie inférieure de la hampe réalise un type mixte (p. 26). La feuille du *Chlorophytum*, quoique extérieurement presque identique à celle du *Tradescantia*, possède une nervation très différente (pp. 30 et 35). L'insertion des bourgeons axillaires de la hampe n'est pas la même que l'insertion des bourgeons axillaires du rhizome (pp. 15 et 27) Dans la hampe, les petits faisceaux disposés en cercle à la périphérie du cylindre central sont des gemmaires et non pas des anastomotiques comme ceux qui occupent la périphérie du rhizome avant l'apparition des racines (p. 27). Les vaisseaux sont relativement courts, surtout dans le rhizome : les variations de leur longueur semblent soumises à la loi de Quételet et Galton (pp. 18 et 29). Le phlœoterme présente des caractères très variables selon les conditions dans lesquelles la plante a végété (pp. 20 à 24 et 30).

CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES.

Nous nous sommes occupés jusqu'ici de la structure de deux espèces seulement : nous allons maintenant étendre notre étude et comparer le type Palmiers et le type Commélinées, puis formuler quelques considérations sur l'organisation générale des Monocotylées et des Dicotylées.

Dans la plupart des tiges, il faut distinguer les faisceaux qui viennent des feuilles, ceux qui descendent des bourgeons ou rameaux axillaires, et enfin ceux qui donnent insertion aux racines adventives. H. Mohl, le premier, a constaté, par la dissection des Palmiers, que les faisceaux de la tige ne sont que la continuation des faisceaux formant les nervures des feuilles. Cette notion importante, parfaitement juste pour la majorité des faisceaux des tiges garnies de feuilles végétatives, a cependant fait perdre de vue les faisceaux gemmaires : il y aurait des recherches spéciales à faire en vue de déterminer la part qui revient à ces faisceaux dans la constitution de certaines tiges, notamment des axes végétatifs ramifiés et des axes d'inflorescences. Quant aux faisceaux radicifères, leur existence et leur rôle ont été mis en lumière par les recherches de M. Mangin.

Partant de l'insertion d'une feuille, H. Mohl vit les faisceaux se diriger vers le centre du stipe des Palmiers en décrivant une courbe à convexité interne, puis cheminer en descendant parallèlement à l'axe dans la région centrale, et finalement se rapprocher de la périphérie pour continuer leur trajet sous l'écorce. C'est ce que montre clairement le schéma qu'il a tracé et qui a été reproduit dans tous les traités de Botanique. Quant à la terminaison inférieure des faisceaux, le schéma ne l'indique point, et on ne s'en préoccupe généralement pas. Mohl dit cependant que les faisceaux revenus à la périphérie et considérablement amincis descendent jusqu'à la base de la tige ou bien se fusionnent avec d'autres faisceaux périphériques auxquels ils se sont unis. Mohl admet que l'organisation des Palmiers se

retrouve dans toutes les Monocotylées, avec des variantes dans le détail de la structure des tissus.

Les travaux de Meneghini, de Lestiboudois et de Nägeli eurent pour résultat de corriger ce que présentait de trop schématique le parcours des faisceaux décrit par H. Mohl. On reconnut que la course descendante des faisceaux ne se fait pas dans un plan vertical, mais qu'il y a des déplacements dans le sens tangentiel, de telle sorte que certains faisceaux décrivent une spirale plus ou moins prononcée. C'est pour cette raison qu'il est impossible de suivre leur trajet dans une coupe radiale. Il fut établi aussi que tous les faisceaux provenant d'une même feuille ne se comportent pas toujours de la même manière : le médian et les plus voisins du médian se rapprochent beaucoup du centre de la tige, tandis que les autres pénètrent d'autant moins profondément qu'ils sont plus éloignés du médian. On a constaté, enfin, que tous les faisceaux ne font pas retour à la périphérie ; qu'il y en a, au contraire, un certain nombre qui s'anastomosent dans la région la plus profonde de la tige. Ces faisceaux n'ont donc pas l'indépendance qu'on leur attribuait : ils se jettent les uns sur les autres et forment de véritables sympodes (1).

Ce dernier point a été confirmé par les observations consignées dans l'important mémoire que M. Falkenberg a consacré à l'anatomie des organes végétatifs des Monocotylées : il a constaté dans le *Typha,* l'*Acorus,* le *Chamædorea* et diverses Broméliacées, que les faisceaux se rencontrent et s'anastomosent avant d'atteindre la périphérie du cylindre central.

(1) Dès 1840, Lestiboudois décrivait et figurait ces anastomoses dans l'*Yucca,* le *Pandanus* et divers Palmiers. On a trop perdu de vue ces faits, peut-être parce qu'ils ont été énoncés d'une façon défectueuse. Au lieu de les rattacher simplement au parcours des faisceaux, Lestiboudois leur attribuait un rôle dans l'accroissement de la tige des Monocotylées. (*Études sur l'anatomie et la physiologie des végétaux,* 1840, pp. 147, 149, 150, 210, pl. XVII, XVIII et XXI. La fig. 2 de la pl. XVII, *Yucca aloifolia,* est particulièrement démonstrative.)

Dans ce même mémoire, M. Falkenberg a ramené toutes les Monocotylées à trois types définis par le cours de leurs faisceaux : le premier est formé par les Monocotylées submergées dont la tige ne possède qu'un seul « faisceau axile » (1); le deuxième correspond au type Palmier de H. Mohl; le troisième est caractérisé par ce fait que les faisceaux ne retournent pas à la périphérie. Dans ce dernier type sont rangés le *Tradescantia* et les parties aériennes de *Lilium*, de *Tulipa*, de *Fritillaria*, de *Cephalanthera*, d'*Epipactis* et d'*Hedychium*.

Il est donc inexact de se figurer, comme on est porté à le faire sous l'influence du schéma décrit et figuré d'une façon trop simplifiée dans les traités élémentaires, les faisceaux des Monocotylées comme tous équivalents, tous parfaitement continus et libres depuis leur entrée dans la tige jusqu'à leur terminaison à la périphérie du cylindre central (2).

Dans les tiges monocotylées, particulièrement dans les rhizomes, il y a lieu de distinguer la portion *foliaire* et la portion *anastomotique* des faisceaux : dans la première, le faisceau descendant d'une feuille garde toute son individualité; dans la seconde, il l'a perdue en s'unissant à d'autres faisceaux. Sans doute, dans les Palmiers à gros stipe, beaucoup de faisceaux sont à l'état foliaire sur une étendue considérable correspondant aux deux courbures et à l'état anastomotique dans une petite étendue correspondant à leur trajet périphérique. Mais dans les tiges d'un diamètre relativement faible par rapport aux feuilles végétatives qu'elles portent, la portion foliaire est réduite à la première courbure, la portion anastomotique correspondant à tout le reste du trajet. Tel est le cas du rhizome de *Chloro-*

(1) Aujourd'hui, il faut admettre avec M. C.-E. Bertrand (*Archives botaniques du Nord de la France*, t. I, p. 27), chez les Monocotylées submergées, non pas un faisceau axile, mais une fusion plus ou moins complète de tous les faisceaux rapprochés du centre de la tige.

(2) Les ouvrages élémentaires devraient s'abstenir de traiter certaines questions qu'ils ne peuvent développer suffisamment et mettre à la portée des commençants : la structure comparée des Monocotylées et des Dicotylées est, pensons-nous, de ce nombre.

phytum décrit dans le présent travail. Lorsque les tiges sont plus effilées encore, les foliaires perdent leur individualité peu après leur entrée dans la tige en se jetant sur un des anastomotiques. Ceux-ci ont un très long trajet rectiligne; ils opèrent finalement leur retour à la périphérie dans la partie souterraine. Nous en avons vu un exemple dans la hampe du *Chlorophytum*. On peut observer tous les intermédiaires entre le type réalisé par les plus gros stipes des Palmiers et celui des hampes les plus effilées.

Les Commélinées n'appartiennent pas au type III tel que M. Falkenberg l'a défini : elles forment réellement un type à part. Ce type, dérivé, lui aussi, du type général des Monocotylées, est caractérisé par l'existence de deux sortes de foliaires et de deux sortes d'anastomotiques, les faisceaux foliaires externes faisant seuls retour à la périphérie, comme il a été expliqué par l'un de nous dans le mémoire sur le *Tradescantia virginica*. Dans le type Commélinées aussi, la distinction entre les faisceaux foliaires et les faisceaux anastomotiques est particulièrement nette; le passage des premiers aux seconds se fait brusquement et non pas graduellement comme dans le *Chlorophytum* et la plupart des Monocotylées.

Il est une catégorie de faisceaux dont quelques auteurs font souvent mention soit dans les tiges du type Commélinées, soit dans celles du type Palmiers : nous voulons parler des faisceaux dits « propres à la tige ». Dans le *Tradescantia*, il a été démontré qu'il n'y a pas de faisceaux propres à la tige et que les faisceaux ainsi nommés sont en réalité les faisceaux anastomotiques externes. Le *Chlorophytum* nous fournit l'occasion de revenir sur ce sujet. Les sections transversales pratiquées dans les entre-nœuds de la hampe de cette plante montrent, en effet, certains petits faisceaux périphériques situés sous le phlœoterme ou dans la gaine mécanique de sclérenchyme. Ces faisceaux nous paraissent semblables à ceux qui existent dans le *Ruscus Hypoglossum* et l'*Asparagus scaber* et qui ont été considérés comme propres à la tige par M. Falkenberg. Or, dans le *Chlorophytum*, nous avons trouvé que les petits faisceaux périphériques repré-

sentent une partie des faisceaux qui descendent des rameaux axillaires de la hampe ou des cymes situés dans l'aisselle des bractées. Ce sont donc des gemmaires. Ceci confirme l'opinion émise au sujet du *Tradescantia*, à savoir que, sous le nom de faisceaux propres à la tige, on a désigné des faisceaux de nature diverse selon les espèces étudiées (1).

En insistant sur la distinction qu'il convient de faire entre les faisceaux foliaires et les faisceaux anastomotiques, nous avons voulu montrer non seulement les affinités qui lient les divers types monocotylés les uns aux autres, mais encore les rapports existant entre les Monocotylées et les Dicotylées au point de vue du parcours des faisceaux. Généralement, dans ces dernières, les faisceaux sont peu nombreux, les foliaires et les anastomotiques se distinguent très nettement : les premiers s'enfoncent peu profondément dans la tige et n'ont qu'un court trajet; les seconds sont disposés en un cercle autour de la moelle (2).

La différence entre les deux classes d'Angiospermes n'est donc pas absolue. On connaît d'ailleurs certaines tiges dicotylées dont

(1) *Loc. cit.*, pp. 75 et suivantes.

(2) Les Dicotylées se distinguent encore par l'activité du cambium producteur de tissus libéro-ligneux secondaires. Dans les Monocotylées, des cellules cambiales à cloisonnement tangentiel peuvent s'observer entre le bois et le liber des faisceaux, mais ces cellules restent à peu près improductives. Quelques exemples en ont été signalés par Mœbius en 1886, par Mlle S. Andersson en 1889, par M. C. Quéva en 1894 dans les Dioscorées et les Liliacées, enfin par M. A. Gravis en 1898 dans les *Tradescantia virginica*. Ces observations sont corroborées par la découverte que M. C. Quéva a faite plus récemment d'une véritable production de bois secondaire et de liber secondaire dans les faisceaux des tubercules du *Gloriosa superba*. « Nous sommes donc autorisés, dit-il, à regarder les Monocotylédonées comme dérivant de Dicotylédonées inférieures chez lesquelles la zone cambiale des faisceaux aurait subi une extinction précoce, le nombre des faisceaux de la trace foliaire devenant très élevé et la feuille s'insérant largement sur la tige. » (C. Quéva, *Sur un cas d'accroissement secondaire dans les faisceaux primaires d'une plante monocotylédonée*, Association française pour l'avancement des sciences, Congrès de Saint-Étienne, 1897, p. 446.)

la section transversale offre des faisceaux assez nombreux et éparpillés. Dans ces tiges, le trajet des foliaires s'est allongé et leur courbure vers le centre s'est accentuée ; par contre, les anastomotiques ont perdu de leur importance comme formations primaires (*Phytolacca*, *Amarantus*, *Thalictrum*).

Malgré cette conformité générale, le parcours des faisceaux se diversifie de façon à donner naissance à plusieurs types susceptibles, semble-t-il, de caractériser les principaux groupes de plantes angiospermes. Malheureusement, la connaissance exacte d'un parcours de faisceaux exige de longues recherches, et l'on a objecté que celles-ci ne paraissent nullement en rapport avec les résultats acquis jusqu'ici. A la vérité, dans ces questions qui devraient porter sur l'ensemble d'une organisation, on a trop souvent décrit minutieusement une région particulière *sans dégager suffisamment le plan fondamental.* C'est ce que M. O. Lignier a déjà parfaitement fait ressortir en attirant l'attention sur l'importance du système libéro-ligneux foliaire, qu'il nomme mériphyte, et en montrant que le détail des contacts avec les anastomotiques doit être négligé parce qu'il est sans influence sur le plan fondamental. Nous avons, de notre côté, insisté sur la composition et l'agencement des traces foliaires, sur leur position relativement aux faisceaux anastomotiques (1). L'étude des traces foliaires, en effet, nous paraît résumer ce qu'il y a d'intéressant dans la connaissance du parcours des faisceaux dans les tiges, c'est-à-dire ce qu'il y a de plus constant et de plus caractéristique. En procédant ainsi, l'énoncé des parcours de faisceaux se simplifie et conduit à des résultats encourageants.

Qu'il nous soit permis, en terminant, de faire remarquer que les différences si nettes, qui ont été signalées dans ce travail, entre la structure du *Chlorophytum* et celle du *Tradescantia*, ne consistent pas en détails histologiques, mais qu'elles tiennent à l'ensemble de l'organisation, à ce qu'on pourrait appeler l'archi-

(1) Une trace foliaire n'est, en somme, que la portion inférieure d'un mériphyte, celle qui est comprise dans la tige.

tecture de ces plantes, architecture qui évidemment est en rapport intime avec l'arrangement des faisceaux dans les tiges et les feuilles. Or, il s'agit de deux espèces appartenant à des familles assez voisines, et nous savons déjà que chacune d'elles peut être considérée comme réalisant assez exactement le type même de la famille dont elle fait partie.

Quant aux caractères histologiques proprement dits, notamment ceux des feuilles, leur emploi en Botanique systématique semble devoir être réservé aux diagnoses spécifiques, selon les idées de Vesque. Ainsi s'établirait une sorte de subordination des caractères anatomiques applicables à la classification, subordination analogue à celle des organes floraux admise, depuis A.-L. de Jussieu, comme fondement de la méthode naturelle.

PLANCHES.

EXPLICATION DE LA PLANCHE I.

CHLOROPHYTUM ELATUM.

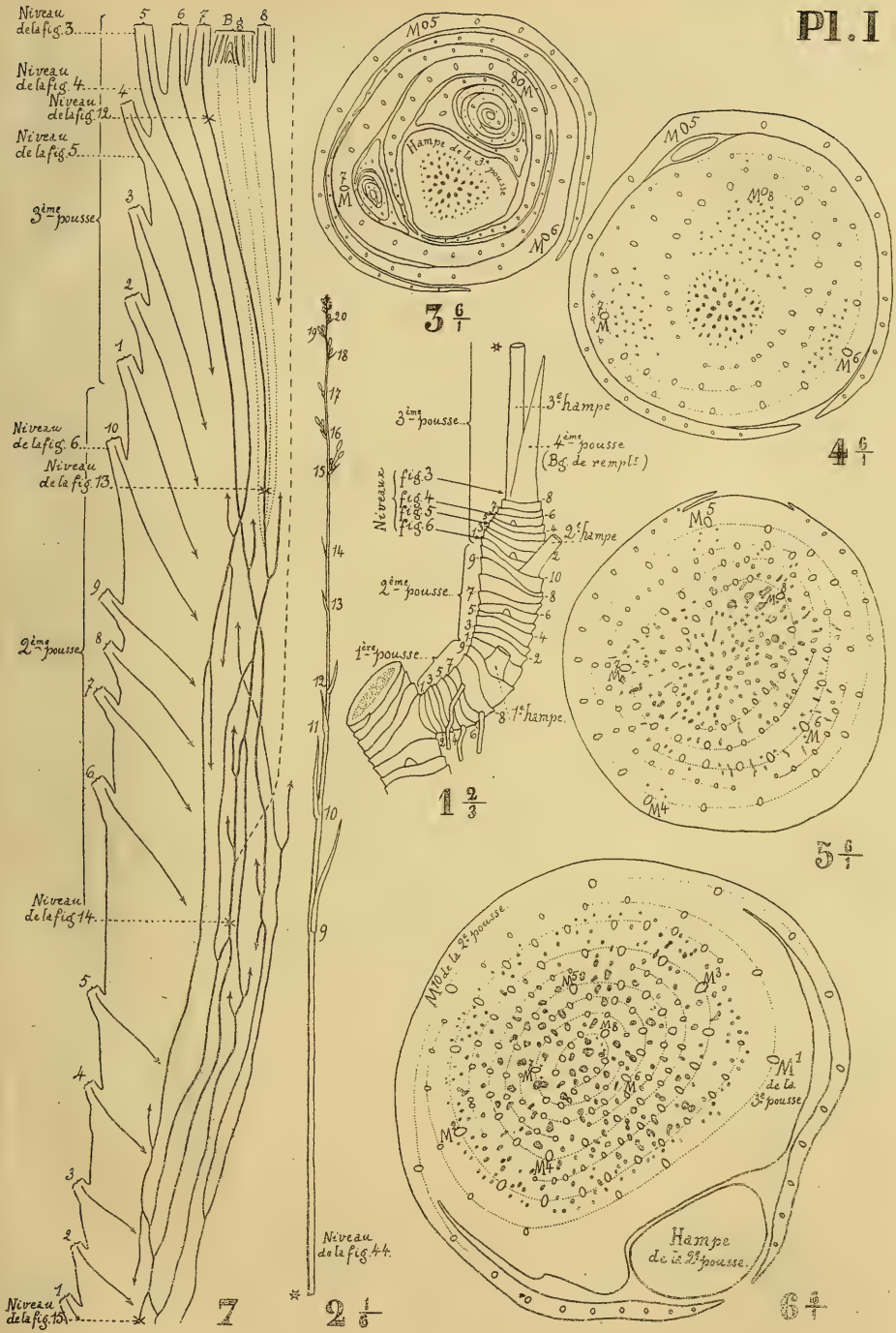
Rhizome.

Fig. 1. — Rhizome formé de quatre pousses disposées en sympode, la plus jeune étant encore à l'état de bourgeon de remplacement. Toutes les feuilles ont été détachées au niveau de leur insertion, sauf celles du bourgeon (pp. 7 et 8).

Fig. 2. — Hampe au début de la floraison : c'est la troisième hampe du rhizome précédent, mais réduite davantage (pp. 8 et 25).

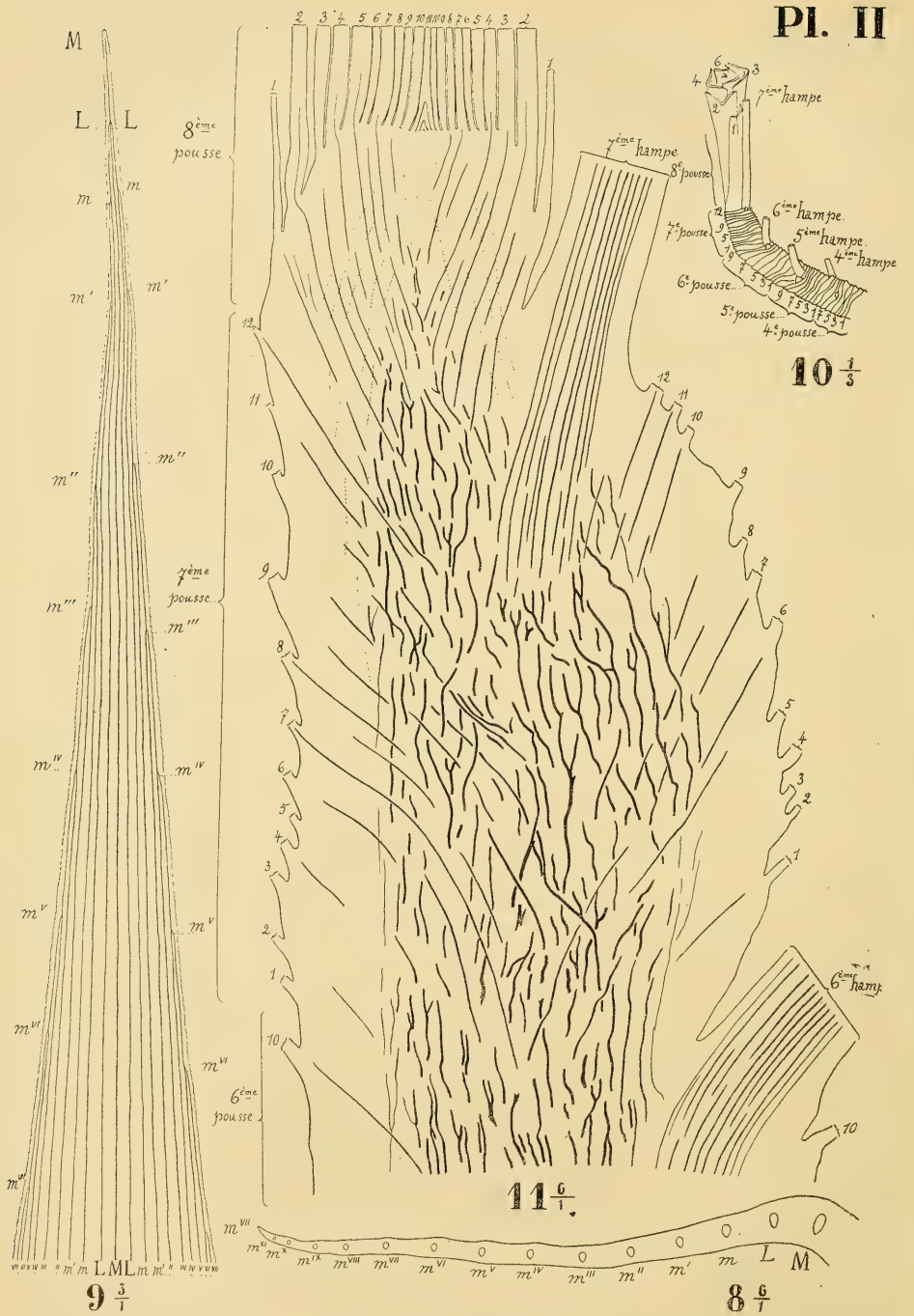
Fig. 3, 4, 5 et 6. — Coupes transversales pratiquées dans la troisième pousse du rhizome représenté par la figure 1. Pour l'indication des niveaux, voir la figure 1. Le médian de chaque trace foliaire est indiqué par M (pp. 9 à 13).

Fig. 7. — Parcours des faisceaux M, m^{VII} et m' provenant respectivement des feuilles 7, 6 et 5 de la troisième pousse du rhizome représenté par la figure 1. Le trajet de ces faisceaux est reproduit tel qu'il serait visible dans une longue section radiale du rhizome (p. 11).



A. GRAVIS ad. nat. del.

CHLOROPHYTUM ELATUM. Rhizome.



CHLOROPHYTUM ELATUM. Rhizome.

EXPLICATION DE LA PLANCHE II.

CHLOROPHYTUM ELATUM.

Rhizome.

Fig. 8. — Moitié de la section transversale pratiquée au milieu du limbe d'une feuille adulte (p. 10).

Fig. 9. — Extrémité de la même feuille rendue transparente montrant la nervation (p. 10).

Fig. 10. — Portion d'un rhizome dont les feuilles ont été détachées au niveau de leur insertion. Toutefois la partie inférieure des feuilles de la huitième pousse a été maintenue (p. 14).

Fig. 11. — Coupe longitudinale radiale dans la septième et la huitième pousse du rhizome précédent (p. 14).

EXPLICATION DE LA PLANCHE III.

CHLOROPHYTUM ELATUM.

Rhizome.

Fig. 12 à 15. — Coupes transversales d'un même faisceau à divers niveaux de son parcours. Ces niveaux sont indiqués dans la figure 7 (pp. 17 et 18).

Fig. 16. — Portions de trachées annelées et spiralées étirées (p. 17).

Fig. 17. — Portions de trachées non étirées (p. 17).

Fig. 18. — Portions de vaisseaux aréolés (p. 18).

Fig. 19. — Un vaisseau aréolé isolé, entier, de longueur moyenne, soit $2^{mm},2$ (p. 18 en note).

Fig. 20. — Ponctuations aréolées d'un vaisseau vues de face (p. 18).

Fig. 21. — Idem en coupe longitudinale (p. 18).

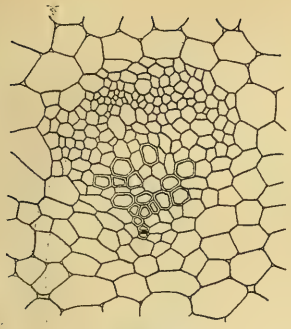
Fig. 22. — Portions d'un vaisseau aréolé dissocié par la macération de Schultze (p. 18 en note).

Fig. 23 et 24. — Cellules à raphides dans une coupe longitudinale (p. 20).

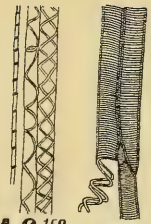
Fig 25. — Coupe transversale à la limite du cylindre central et de l'écorce du rhizome dans le voisinage d'une jeune racine adventive (p. 16).

Fig. 26. — Section d'un vieux rhizome montrant l'insertion de deux racines et le réseau radicifère. La ligne en traits interrompus représente l'assise subérisée qui fait suite à l'endoderme des racines, lequel est indiqué en pointillé (p. 22).

Fig. 27. — Coupe tangentielle montrant les faisceaux radicifères correspondant à l'insertion d'une racine adventive (p. 17).



12 150/1

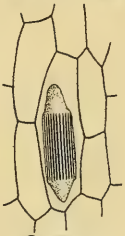


16 150/1 17 150/1

18 150/1

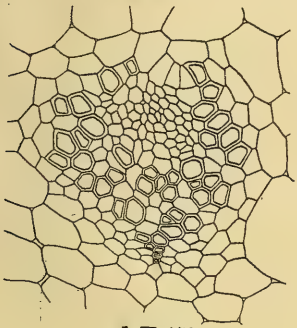
20 500/1

21 500/1 22 150/1

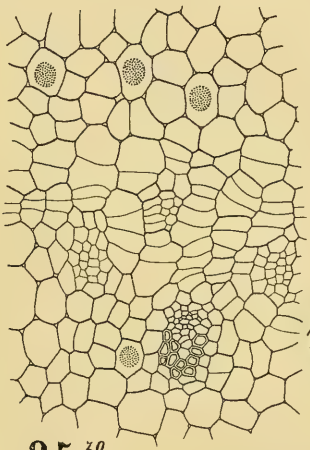


23 70/1

24 70/1

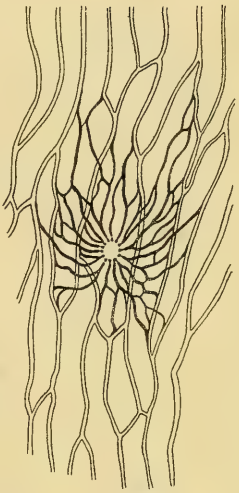


13 150/1

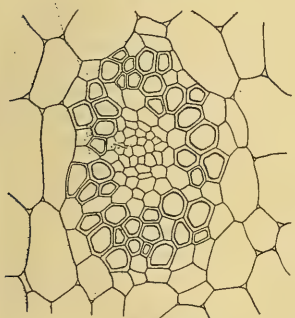


25 70/1

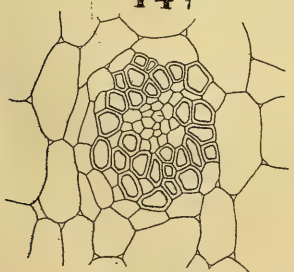
19 25/1



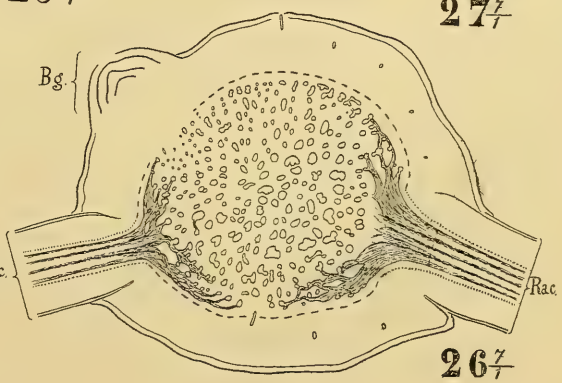
27 7/1



14 150/1



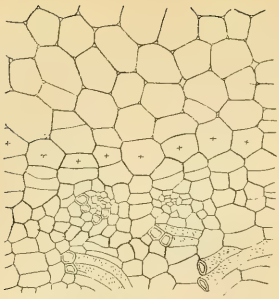
15 150/1



26 7/1

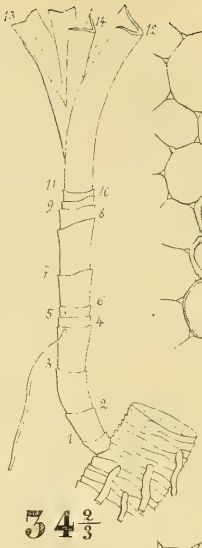
A. GRAVIS ad. nat. del.

CHLOROPHYTUM ELATUM. Rhizome.

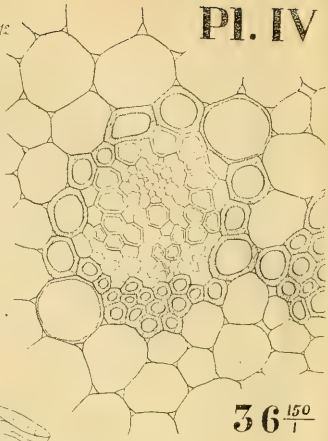


28 $\frac{70}{1}$

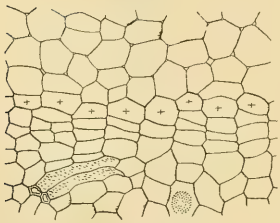
35 $\frac{2}{3}$



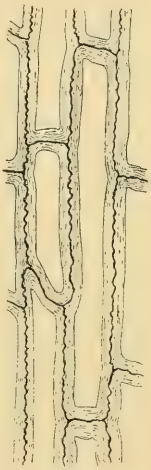
34 $\frac{2}{3}$



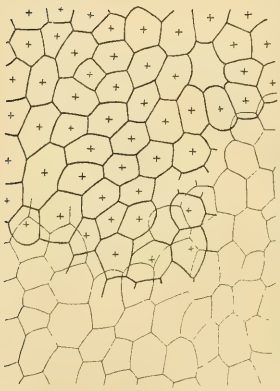
36 $\frac{150}{1}$



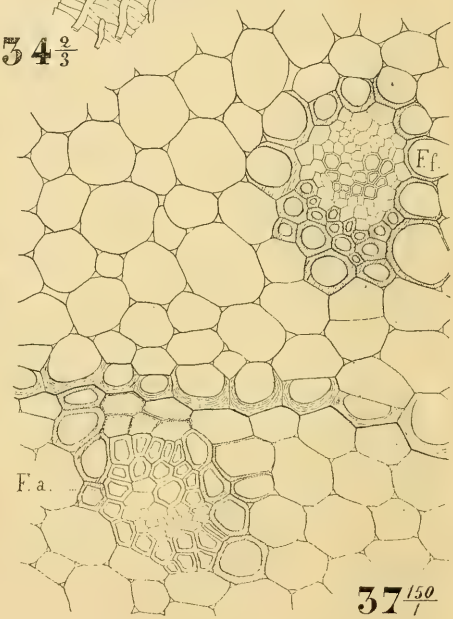
29 $\frac{70}{1}$



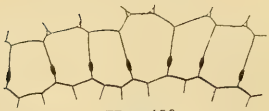
33 $\frac{150}{1}$



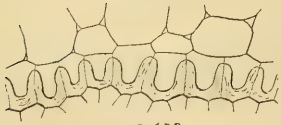
30 $\frac{70}{1}$



37 $\frac{150}{1}$

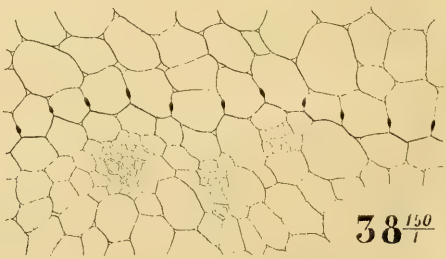


31 $\frac{150}{1}$



32 $\frac{150}{1}$

39 $\frac{150}{1}$



38 $\frac{150}{1}$

A. GRAVIS ad. nat. del.

CHLOROPHYTUM ELATUM. Rhizome.

EXPLICATION DE LA PLANCHE IV.

CHLOROPHYTUM ELATUM.

Rhizome.

Fig. 28 et 29. — Assise de cellules subérisées à la périphérie du cylindre central d'un vieux rhizome. Les cellules à parois subérisées sont indiquées par des croix (p. 21).

Fig. 30. — La même assise dans une coupe tangentielle du rhizome (p. 21).

Fig. 31. — Endoderme d'une jeune racine, coupe transversale (p. 22 en note).

Fig. 32. — Idem d'une vieille racine coupée transversalement (p. 22 en note).

Fig. 33. — Idem d'une vielle racine coupée tangentiellement (p. 22 en note).

Fig. 34 et 35. — Tiges grêles résultant du développement de bourgeons latents situés sur de vieux rhizomes enterrés lors d'un repiquage (p. 23).

Fig. 36 à 39. — Histologie (p. 24).

EXPLICATION DE LA PLANCHE V.

CHLOROPHYTUM ELATUM.

Hampe.

Fig. 40. — Un segment de la partie supérieure de la hampe (segment ^{19}), avec une cyme dans l'aisselle de la bractée (p. 27). Voyez figure 2.

Fig. 41. — Entre-nœud ^{19} (p. 26).

Fig. 42. — Nœud ^{19} (p. 26).

Fig 43. — Base de l'entre-nœud ^{20} : dans l'aisselle de la bractée se trouve la cyme dont les bractéoles sont indiquées par des chiffres arabes et les pédoncules floraux par des chiffres romains (p. 26).

Fig. 44. — Entre-nœud le plus inférieur de la hampe, soit entre-nœud ^{9} de la pousse (p. 27).

Fig. 45. — Entre-nœud ^{26} de la même hampe (p. 26). — Les niveaux correspondants à ces deux coupes sont indiqués dans la figure 2.

Fig. 46. — Parcours des faisceaux dans les segments 19 à 29 de la hampe : celle-ci est supposée fendue et étalée (p. 26).

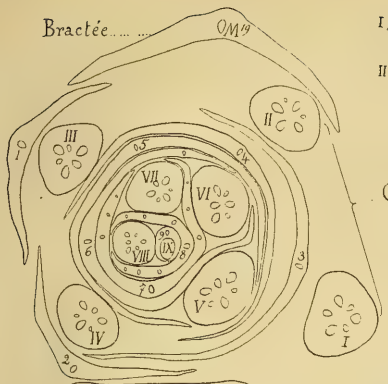
Fig. 47. — Histologie de la hampe (pp. 29 et 30).

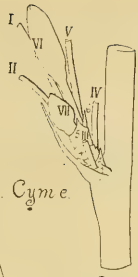
Fig. 48. — Un vaisseau scalariforme, entier, isolé par la macération de Schultze, de longueur moyenne, soit $4^{mm},7$ (p. 29 en note).

Fig. 49. — Portions de ce vaisseau grossi (p. 29 en note).

Fig. 50. — Courbe exprimant la longueur de 70 vaisseaux exactement mesurés après dissociation (p. 29 en note).

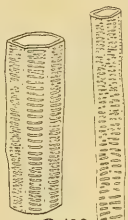
Fig. 51 et 52. — Cellules cristalligènes dans une coupe longitudinale (p. 30).



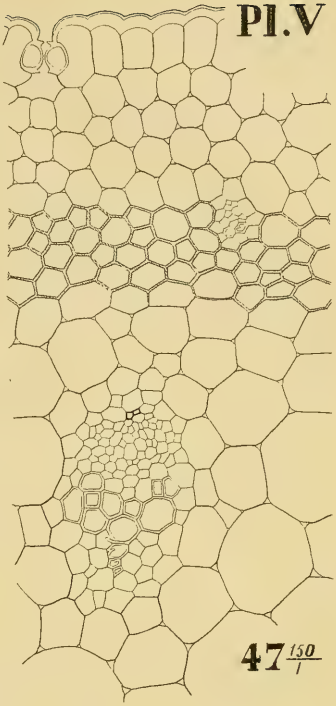


40 4/3

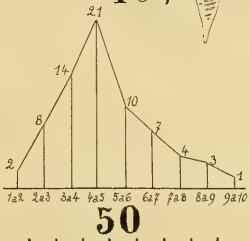
43 15/1



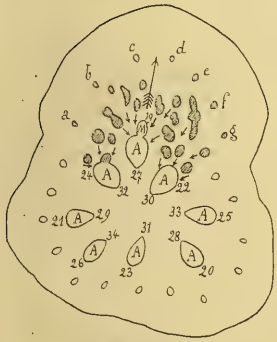
49 150/1



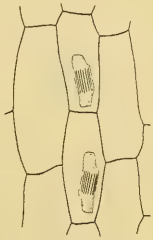
47 150/1



50



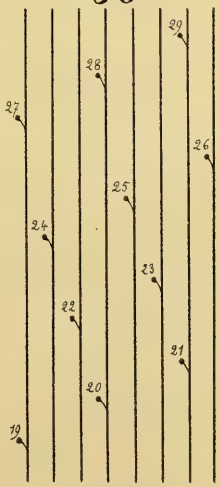
42 15/1



51 50/1

52 50/1

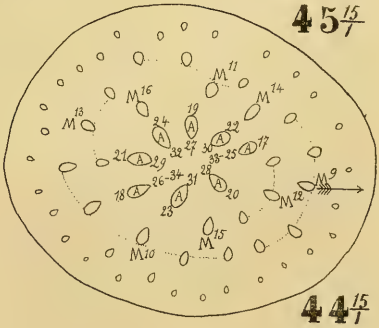
45 15/1



48 25/1

41 15/1

46



44 15/1

A. GRAVIS ad. nat. del.

CHLOROPHYTUM ELATUM. Hampe.

TABLE DES MATIÈRES.

Pages.

INTRODUCTION. 3

PREMIÈRE PARTIE.

ANATOMIE DU *CHLOROPHYTUM ELATUM* (AIT.).

Caractères extérieurs 7

CHAPITRE PREMIER.

Le rhizome.

§ 1. *Parcours des faisceaux.*

A. Composition d'une trace foliaire 9

B. Parcours des faisceaux constituant une trace foliaire 10

C. Comparaison des traces foliaires successives 11

D. Agencement des traces foliaires 13

§ 2. *Bourgeon terminal.* 13

§ 3. *Insertion des bourgeons axillaires* 15

§ 4. *Insertion des racines adventives* 16

§ 5. *Histologie.* 17

Modifications histologiques résultant de la formation des racines adventives 20

Tiges développées dans l'obscurité 23

CHAPITRE II.

La hampe.

§ 1. *Parcours des faisceaux.* 25

§ 2. *Insertion des bourgeons axillaires* 27

§ 3. *Histologie.* 29

SECONDE PARTIE.

COMPARAISON DU *CHLOROPHYTUM ELATUM* (Ait.) ET DU *TRADESCANTIA VIRGINICA* L.

Pages.

Caractères extérieurs 31
§ 1. *Parcours des faisceaux* 33
§ 2. *Bourgeon terminal* 36
§ 3. *Insertion des bourgeons axillaires* 37
§ 4. *Insertion des racines adventives* 38
§ 5 *Histologie*. 39
§ 6. *Parcours des faisceaux dans la hampe* 41
§ 7. *Cymes* 42

Résumé 43

CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES 45

Explication des planches 52

DÉTERMINATIONS

DE

LA DÉCLINAISON

ET DE

LA COMPOSANTE HORIZONTALE

DE LA FORCE MAGNÉTIQUE

A L'AIDE DU THÉODOLITE-BOUSSOLE D'ABBADIE-MASCART

PAR

M. DEHALU.

INTRODUCTION

L'objet de ce travail est une série d'observations de la déclinaison et de la composante horizontale de la force magnétique faites à Cointe, à l'aide du théodolite-boussole d'Abbadie-Mascart, qu'avait bien voulu nous confier M. Niesten, le distingué chef de service de l'Observatoire royal d'Uccle.

Nous renvoyons, pour la description complète de cet instrument ainsi que pour le détail des opérations, à la notice publiée par M. Niesten dans l'*Annuaire de l'Observatoire royal de Belgique pour 1900*. Il nous suffira de dire que l'instrument possède deux cercles d'environ 10 centimètres de diamètre, gradués en demi-degrés; les verniers permettent d'apprécier la minute. La longueur de la lunette est de 22 centimètres et le diamètre de l'objectif est de 22 millimètres. L'axe principal porte à l'une de ses extrémités la lunette, à l'autre, une petite cage surmontée d'une colonne creuse qui protège le fil de soie soutenant le barreau aimanté. Le réticule en fils d'araignée se compose d'un grand carré dont les côtés ont à peu près le diamètre du soleil. Deux fils perpendiculaires partagent le grand carré en quatre autres et forment, en leur point de croisement, le centre du réticule.

Avec un instrument de dimensions si réduites, mais d'une grande commodité pour le transport, on ne peut espérer quelque précision dans la détermination du méridien géographique, qu'en multipliant les observations astronomiques. C'est ce que

nous avons fait, tant pour déterminer l'azimut absolu du repère choisi que pour nous assurer de la valeur de l'instrument.

L'azimut du repère a été vérifié à l'aide du théodolite de Negretti et Zambra, dont les verniers permettent de lire les 20″.

Pour le calcul de réduction, les formules employées sont celles qui permettent de calculer l'azimut séparément par l'angle horaire ou la hauteur.

Les constantes qui ont servi aux calculs des observations magnétiques nous ont été fournies par M. Niesten. Ce sont :

$$R = 20.3125 \qquad r = 15.508 \qquad \log \pi^2 K = 2.5376190.$$

Les résultats obtenus nous font croire que le théodolite-boussole permettrait de dresser rapidement une excellente carte magnétique d'une région.

Qu'il nous soit permis d'adresser ici nos plus vifs remerciements à l'honorable M. Niesten, pour la confiance et l'amabilité qu'il n'a cessé de nous témoigner.

DÉTERMINATIONS

DE

LA DÉCLINAISON

ET DE

LA COMPOSANTE HORIZONTALE

DE LA FORCE MAGNÉTIQUE

A L'AIDE DU THÉODOLITE-BOUSSOLE D'ABBADIE-MASCART

OBSERVATIONS ASTRONOMIQUES.

Les observations ont été faites au centre de la pelouse de l'Observatoire de Cointe. Le repère choisi est l'extrémité W du toit de la maison de Mélotte. L'azimut absolu du repère a été déterminé le 17 juillet, par l'observation de la polaire.

L'état du chronomètre, temps sidéral, était $+ 1^m5^s3$. Huit pointés de la polaire ont été effectués : quatre, cercle à gauche, quatre, cercle à droite.

Cercle à gauche.			Cercle à droite.		
t	A	Z	t	A	Z
—	—	—	—	—	—
$17^h\ 8^m\ 2^s$	154°16′	150°19′	$17^h37^m47^s$	154°22′	50°18′
17 17 35	154 19	150 21	17 43 44	154 23	50 16
17 23 5	154 20	150 23	17 49 34	154 24	50 15
17 28 13	154 21	150 24′5	17 54 34	154 25	50 13

La lecture du zénith sur le cercle a été déterminée par des visées du repère, dans l'après-dîner du 17 juillet.

Visée du repère :

Cercle à droite	176°33′	98°13′
Cercle à gauche	176 32	102 32

Pour le calcul des azimuts de la polaire par les angles horaires, on a fait usage des *Tables de la Connaissance des temps*.

Azimut absolu du repère :

PAR LES ANGLES HORAIRES.		PAR LES HAUTEURS.	
Cercle à gauche.	Cercle à droite.	Cercle à gauche.	Cercle à droite.
—	—	—	—
23°51′48″	23°52′30″	»	23°52′30″
23 51 30	23 53 48	23°51′30″	23 53 0
23 51 54	23 54 48	23 52 30	23 53 18
23 52 42	23 53 54	23 54 0	23 53 12
23°51′59″	23°53′45″	23°52′40″	23°53′0″
Moyenne. . .	23°52′52″		23°52′50″

Observations du Soleil, le 28 juillet 1899.

L'état du chronomètre, temps sidéral, était + 1ᵐ29ˢ92.

t	A	Z	
—	—	—	
5ʰ11ᵐ10ˢ	143°20′	60°15′	cercle à droite.
5 15 30	144 22	59 38	
5 19 19	145 20	141 41	cercle à gauche.
5 22 38	146 10	142 10	
5 26 10	147 0	58 5	cercle à droite.
5 30 7	148 1	57 31	
Repère :	56 31	98 13	cercle à droite.
	56 30	102 32	cercle à gauche.

Azimut absolu du repère :

Par les angles horaires.	Par les hauteurs.
23°56′22″	23°56′34″
23 55 9	23 54 54
23 53 21	23 53 40
23 52 15	23 53 10
23 55 46	23 55 20
23 54 59	23 54 14
23°54′40″	23°54′38″

Moyenne. . . . . 23°54′39″

Observations du Soleil, le 28 juillet 1899.

L'état du chronomètre était de + 1ᵐ29ˢ9.

t	A	Z	
14ʰ34ᵐ34ˢ	135°51′	86°34′5	cercle à droite.
14 38 15	136 31	87 8	
14 41 53	137 10	113 3	cercle à gauche.
14 44 13	137 36	112 42	
14 47 33	138 14	88 33	cercle à droite.
14 49 57	138 40	88 25′5	
14 53 5	139 14	111 21	cercle à gauche.
14 55 20	139 38′5	111 1	
Repère :	56 31	98 13	cercle à droite.
	56 30	102 32	cercle à gauche.

Azimut absolu du repère :

Par les angles horaires.	Par les hauteurs.
23°50′53	23°52′20″
23 51 44	23 53 40
23 54 50	23 55 6
23 54 32	23 54 48
23 53 18	23 56 6
23 53 48	23 54 26
23 54 22	23 55 10
23 55 10	23 54 6
23°53′45″	23°54′28″

Moyenne. . . . . 23°54′7″

Observations de la Polaire, le 4 août 1899. Théodolite de Négretti et Zambra, n° 2.

L'état du chronomètre, temps sidéral, était + 1ᵐ55ˢ.

t	A	Z	
18ʰ26ᵐ53ˢ	13°29′ 10″	39°25′ 50″	cercle à droite.
18 35 12	13 28 50	39 23 10	
18 45 14	13 30 20	39 19 50	
18 54 0	13 31	39 17 10	
19 5 34	13 36 20	50 20 20	cercle à gauche.
19 12 0	13 36 10	50 23	
19 20 23	13 36 50	50 24 40	
19 26 41	13 36 30	50 25 40	
Repère :	35 32	87 39 40	cercle à droite.
	35 32 50	1 53 40	cercle à gauche.

Azimut absolu du repère :

Par les angles horaires.		Par les hauteurs.	
23°55′ 20″	cercle à droite.	23°56′ 5″	cercle à droite.
23 56 41		23 57 25	
23 56 22		23 56 55	
23 56 19		23 56 55	
23 52 27	cercle à gauche.	23 52 15	cercle à gauche
23 52 53		23 52 35	
23 52 25		23 51 55	
23 52 46		23 52 21	
23°54′ 24″		23°54′ 33″	

Moyenne. . . . . 23°54′29″

Résumé des azimuts absolus du repère :

Théodolite-boussole	23°52′ 54″	Polaire.
	23 54 39	Soleil.
	23 54 7	Soleil.
Théodolite Négretti	23 54 29	Polaire.
Moyenne.	23°54′ 1″	

Nous fixerons donc l'azimut à 23°54′

OBSERVATIONS MAGNÉTIQUES.

Date : 14 juillet 1899.

Repère :	296°29′	cercle à droite, avant l'observation.
	296 31	cercle à gauche.
	296 29	cercle à droite. après l'observation.
	296 31	cercle à gauche.
Moyenne. . . .	296 30	
Azimut du repère	23 54	
Méridien géographique	272 36	

DÉCLINAISON.

Barreau n° 2, de 10^h à 10^h15^m, temps officiel.

Lunette à l'est.	258°42′	goupille à l'est.
	258 44	goupille à l'ouest.
Lunette à l'ouest	258 51	goupille à l'est.
	258 50	goupille à l'ouest.
Méridien magnétique	258 46.8	
Méridien géographique . . .	272 36 0	
Déclinaison	13 49 2	

Barreau n° 2, de 3^h à 3^h20^m.

Lunette à l'est	258°42′	goupille à l'ouest.
	258 42.5	goupille à l'est.
Lunette à l'ouest	258 40	goupille à l'ouest.
	78 38	goupille à l'est.
Méridien magnétique	258 40.6	
Méridien géographique. . . .	272 36 0	
Déclinaison	13 55 4	

Date : 17 juillet 1899.

Repère :	176°33′	cercle à droite, avant l'observation.
	176 32	cercle à gauche.
	176 33	cercle à droite, après l'observation.
	176 32	cercle à gauche.
Moyenne. . . .	176 32.5	
Azimut du repère. . .	23 54 0	
Méridien géographique .	152 38 5	

DÉCLINAISON.

Barreau n° 2, de 4^h à 4^h15^m.

Lunette à l'est	138°50′	goupille à l'est.
	138 55	goupille à l'ouest.
Lunette à l'ouest . . .	138 55	goupille à l'est.
	138 52	goupille à l'ouest.
Méridien magnétique .	138 53	
Méridien géographique.	152 38′ 5	
Déclinaison.	13 45 5	

Date : 18 juillet 1899.

Repère :	56°33′	cercle à droite, avant l'observation.
	56 33	cercle à gauche.
	56 33	cercle à droite, après l'observation.
	56 33	cercle à gauche.
Moyenne. . . .	56 33	
Azimut du repère. . .	23 54	
Méridien géographique.	32 39	

DÉCLINAISON.

Barreau n° 2, de 10^h10^m à 10^h25^m.

Lunette à l'est. . . .	18°53′	goupille à l'est.
	18 57	goupille à l'ouest.
Lunette à l'ouest . . .	18 54	goupille à l'est.
	18 54	goupille à l'ouest.
Méridien magnétique .	18 54.5	
Méridien géographique .	32 39	
Déclinaison.	13 44.5	

Date : 26 juillet 1899.

Repère :	176°32′	cercle à droite, avant l'observation.
	176 31	cercle à gauche.
	176 32	cercle à droite, après l'observation.
	176 32	cercle à gauche.
Moyenne	176 31.8	
Azimut du repère . . .	23 54 0	
Méridien géographique .	152 37 8	

DÉCLINAISON.

Barreau n° 2, de 9^h30^m à 9^h45^m.

Lunette à l'est	138°52′	goupille à l'est.
	138 55	goupille à l'ouest.
Lunette à l'ouest . . .	139 0	goupille à l'est.
	138 57	goupille à l'ouest.
Méridien magnétique .	138 56	
Méridien géographique .	152 37.8	
Déclinaison	13 41 8	

Barreau n° 2, de 9^h55^m à 10^h10^m.

Lunette à l'est	138°56′	goupille à l'est.
	138 59	goupille à l'ouest.
Lunette à l'ouest . . .	138 55	goupille à l'est.
	138 55	goupille à l'ouest.
Méridien magnétique .	138 56.3	
Méridien géographique .	152 37 8	
Déclinaison	13 41 5	

Barreau n° 2, de 3^h55^m à 4^h10^m.

Lunette à l'est	138°55′	goupille à l'est.
	138 53	goupille à l'ouest.
Lunette à l'ouest . . .	138 53	goupille à l'est.
	138 53	goupille à l'ouest.
Méridien magnétique .	138 54.8	
Méridien géographique.	152 37 8	
Déclinaison.	13 43	

Barreau n° 2, de 4^h10^m à 4^h25^m.

Lunette à l'est. . . .	138°53′	goupille à l'est.
	138 57 5	goupille à l'ouest.
Lunette à l'ouest . . .	138 54	goupille à l'est.
	138 53	goupille à l'ouest.
Méridien magnétique .	138 54.4	
Méridien géographique.	152 37 8	
Déclinaison.	13 43 4	

Date : 28 juillet 1899.

Repère :	56°31′	cercle à droite, avant l'observation.
	56 30	cercle à gauche.
	56 31	cercle à droite, après l'observation.
	56 30	cercle à gauche.
Moyenne	56 30.5	
Azimut du repère . . .	23 54 0	
Méridien géographique .	32 36 5	

DÉCLINAISON.

Barreau n° 2, de 9^h à 9^h15^m.

Lunette à l'est	18°57′	goupille à l'est.
	19 0	goupille à l'ouest.
Lunette à l'ouest . . .	18 56	goupille à l'est.
	18 57	goupille à l'ouest.
Méridien magnétique. . .	18 57.5	
Méridien géographique .	32 36 5	
Déclinaison	13 39	

Barreau n° 2, de 4^h20^m à 4^h35^m.

Lunette à l'est	18°51′	goupille à l'est.
	18 54	goupille à l'ouest.
Lunette à l'ouest . . .	18 53	goupille à l'est.
	18 55	goupille à l'ouest.
Méridien magnétique. .	18 53.3	
Méridien géographique .	32 36 5	
Déclinaison	13 43 2	

COMPOSANTE HORIZONTALE.

Date : 14 juillet 1899, de 4^h30^m à 4^h45^m.
Grande distance :

Déviation.	11°23′8 règle à l'est.
Déviation.	11 25 0 règle à l'ouest.
Moyenne. . .	11 24 4

Petite distance :

Déviation.	26°42′5 règle à l'est.
Déviation.	26 54 0 règle à l'ouest.
Moyenne. . .	26 48 3

Oscillations. — La durée d'une oscillation a été déduite d'une série de 150 oscillations : 3^s43.

Température initiale.	26°5
Température finale	25°8

CALCUL DE LA COMPOSANTE.

Par la grande distance . . .	0.189964 cercle à gauche sud.
Par la petite distance . . .	0.189964
Moyenne. . .	0.189964

Date : 17 juillet, de 5^h à 5^h20^m.
Grande distance :

Déviation.	11°29′5 règle à l'ouest.
Déviation.	11 30 0 règle à l'ouest.
Moyenne. . . .	11 29 8

Petite distance :

Déviation.	27°1′ règle à l'est.
Déviation.	27 1 5 règle à l'ouest.
Moyenne . . .	27 1 3

Oscillations. — Durée d'une oscillation : 3ˢ406.

Température initiale . . . . . 22°8
Température finale 22 4

CALCUL DE LA COMPOSANTE.

Par la grande distance. 0.190531
Par la petite distance 0.190531
Moyenne. 0.190531

Date : 18 juillet, de 11^h10^m à 11^h30^m.
Grande distance :

Déviation. . . . . 11°31′ 5 règle à l'est.
Déviation. . . . . 11 31 5 règle à l'ouest.
Moyenne. . . 11 31 5

Petite distance :

Déviation. . . . . 27°6′ 5 règle à l'est.
Déviation. . . . . 27 6 règle à l'ouest.
Moyenne. . . 27 6 3

Oscillations. — Durée d'une oscillation : 3ˢ40.

Température. . . . . 23°9

CALCUL DE LA COMPOSANTE.

Par la grande distance 0.190678
Par la petite distance. 0.190679
Moyenne. 0.1906785

Date : 26 juillet, de 4^h20^m à 4^h40^m.
Grande distance :

Déviation. . . . . 11°20′ 5 règle à l'est.
Déviation. . . . . 11 20 5 règle à l'ouest.
Moyenne . . . 11 20 5

Petite distance :

Déviation.	26°40′	règle à l'est.
Déviation.	26 38 5	règle à l'ouest.
Moyenne . . .	26 39 3	

Oscillations. — Durée d'une oscillation : 3^s4256.

Température	24°

CALCUL DE LA COMPOSANTE.

Par la grande distance.	0.190773
Par la petite distance	0.190773
Moyenne.	0.190773

Date : 28 juillet, de 5^h20^m à 5^h40^m.
Grande distance :

Déviation.	11°20′	règle à l'est.
Déviation.	11 19	règle à l'ouest.
Moyenne. . .	11 19 5	

Petite distance :

Déviation.	26°85′ 5	règle à l'est.
Déviation.	26 34	règle à l'ouest
Moyenne. . .	26 36 3	

Oscillations. — Durée d'une oscillation : 3^s437.

Température initiale	21°9′
Température finale	21

CALCUL DE LA COMPOSANTE.

Par la grande distance.	0.190262
Par la petite distance	0.190262
Moyenne.	0.190262

Les observations qui suivent ont été faites dans la salle magnétique de l'Observatoire.

OBSERVATIONS ASTRONOMIQUES.

Observations de la Polaire, le 14 juillet 1899.

L'état du chronomètre, temps sidéral, était + 57ˢ8.

Huit pointés de la Polaire ont été faits, dans une seule position de l'instrument, cercle à gauche, l'ouverture de la trappe n'étant pas suffisante pour permettre de viser l'étoile après le retournement de la lunette.

L'erreur de collimation était à ce moment de — 2′.

t	A	Z
—	—	—
17ʰ21ᵐ40ˢ	121°11′	150°23′
17 28 22	121 13	150 25
18 1 40	121 19	150 35
18 7 45	121 20	150 36
18 20 48	121 21	150 40
18 27 31	121 22	150 42
18 38 15	121 23	150 46
18 47 25	121 24	150 48

Les *Tables de la Connaissance des temps* nous ont servi à calculer les azimuts de la Polaire, et nous en avons déduit la lecture correspondant au méridien.

	119°32′
	119 32 3
	119 31 1
	119 31 0
	119 30 0
	119 30 1
	119 29 8
	119 29 8
Moyenne. . .	119°30′ 8
c coséc. Z = . . .	— 3′1
Méridien géographique . .	119°27′7

OBSERVATIONS MAGNÉTIQUES.

Date : 15 juillet 1899.

DÉCLINAISON.

Barreau n° 2, de 9^h45^m à 10^h.

Lunette à l'est	105°46′	goupille à l'est.
	105 50	goupille à l'ouest.
Lunette à l'ouest	105 46	goupille à l'est.
	105 46	goupille à l'ouest.
Méridien magnétique	105 47	
Méridien géographique . . .	119 27 7	
Déclinaison	13 40 7	

COMPOSANTE HORIZONTALE.

Grande distance :

Déviation	11°30′ 8	règle à l'est.
Déviation	11 31	règle à l'ouest.
Moyenne . . .	11 30 9	

Petite distance :

Déviation	27°2′	règle à l'est.
Déviation	27 6	règle à l'ouest.
Moyenne . . .	27 4	

Oscillations. — Durée d'une oscillation : 3ˢ425.

Température. . . . . 12°5

CALCUL DE LA COMPOSANTE.

Par la grande distance 0.189313
Par la petite distance 0.189312
Moyenne. 0.189313

RÉDUCTION AU 1er JANVIER 1899.

DÉCLINAISONS.

DATES.	Uccle.	Liége.	Différence.	1er janvier 1899.
14 juillet	14°22′	13°49′ 2	32.8	13°47′2
	14 12 5	13 55 4	»	»
15 —	14 23	13 40 7	31.8	13 48 2
17 —	»	13 45 5	»	»
18 —	»	13 44 5	»	»
26 —	14 15 3	13 41 8	33.5	13 46 5
	14 16 3	13 41 5	34.8	13 45 2
	14 18 5	13 43 0	35.5	13 44 5
	14 18 5	13 43 4	35.1	13 44 9
28 —	14 13 4	13 39	34.4	13 45 6
	14 18 6	13 43 2	35.4	13 44 6

La valeur de la déclinaison magnétique pour Uccle, le 1er janvier 1899, a été prise égale à 14°20′.

La moyenne des différences entre Uccle et Liége est 34′2 en écartant l'observation faite dans l'après-dîner du 14 juillet.

Si l'on compte une différence de 30′ dans la déclinaison par degré de longitude, on trouve que la différence entre Liége et Uccle est d'environ 36′; cette valeur est très proche de la moyenne de nos observations (*).

Les observations faites à Cointe par M. Ronkar, comparées à celles d'Uccle, ont donné une différence de 40′ environ (**).

(*) *Annuaire du Bureau des Longitudes,* 1886, p. 541.
(**) *Annuaire de l'Observatoire de Bruxelles,* 1886, p. 362.

COMPOSANTES HORIZONTALES.

DATES.	Bruxelles.	Liége.	Différence.	1er janvier 1899.
14 juillet	0.189391	0.189964	0.000573	0.189838
15 —	0.189340	0.189313	»	»
17 —	»	0.190531	»	»
18 —	»	0.190679	»	»
26 —	0.189354	0.190773	0.001419	0.190684
28 —	0.189381	0.190262	0.000881	0.190146

SUR LA THÉORIE

DES

ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES

ET EN PARTICULIER

SUR LE CAS IRRÉDUCTIBLE DE LA FORMULE DE CARDAN

PAR

L. GEGENBAUER,
PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE VIENNE.

SUR LA THÉORIE

DES

ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES

ET EN PARTICULIER

SUR LE CAS IRRÉDUCTIBLE DE LA FORMULE DE CARDAN.

La question de savoir si une racine d'une équation irréductible du troisième degré, dont toutes les racines sont réelles, peut être exprimée au moyen de radicaux tous réels, a été proposée pour la première fois dans ces dix dernières années; elle a été traitée par Mollame (*Bull. de l'Acad. des Sciences de Naples*), D. Hölder (*Mathematische Annalen*, 38. Bd), A. Kneser (*Mathematische Annalen*, 41. Bd) et par moi-même (*Monatshefte für Mathematik und Physik*, 4. und 6. Bd).

D'après ces recherches, présentées du reste dans les traités de Weber et de Netto, le cas irréductible de la formule de Cardan ne correspond pas à une défectuosité de la méthode employée, mais il a son origine dans l'essence même de la résolution *algébrique* des équations, et ainsi il ne peut pas être évité.

Dans les leçons d'algèbre que j'ai données cette année à l'Université de Vienne, j'ai obtenu, par une méthode élémentaire, un théorème qui s'applique directement à la question dont il s'agit Ce théorème est en réalité contenu comme cas particulier dans un autre, indiqué par Hölder, Kneser et par moi-même. Néanmoins, la méthode suivie pourra présenter de l'intérêt, à cause de sa simplicité.

Soient

$$x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_{p-1}$$

les racines d'une équation algébrique irréductible dans un domaine réel et déterminé de rationalité; p étant un nombre premier.

Le carré du produit des différences de ces racines

$$\Delta^2(x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_{p-1}) = |\ x_i^k\ |^2,$$
$$(i, k = 0, 1, 2, \ldots, p-1)$$

a, comme on le sait, le signe positif ou négatif, suivant que le nombre ρ des couples de quantités imaginaires conjuguées comprises parmi les racines x_i est un nombre pair (zéro inclusivement) ou un nombre impair.

Supposons que la racine x_0 est fonction rationnelle, et par suite fonction entière de degré $p-1$ de l'une des racines

$$\xi_\lambda\ \ (\lambda = 0, 1, 2, \ldots, p-1)$$

d'une équation irréductible de même degré p dans le même domaine de rationalité; nous aurons

$$x_0 = a_0^{(0)} + a_1^{(0)}\xi_0 + \cdots + a_{p-1}^{(0)}\xi_0^{(p-1)}.$$

A cause de l'irréductibilité supposée, les p expressions

$$a_0^0 + a_1^{(0)}\xi_\lambda + \cdots + a_{p-1}^{(0)}\xi_\lambda^{p-1}$$
$$(\lambda = 0, 1, \ldots, p-1)$$

représentent les racines x_i de l'équation primitive.

Remplaçons les quantités x_i par ces expressions dans

$$\Delta^2(x_0\, x_1 \ldots x_{p-1}) = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^{p-1} \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{p-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_{p-1} & x_{p-1}^2 & \ldots & x_{p-1}^{p-1} \end{vmatrix}^2;$$

observons que d'après l'équation d'ordre p des quantités ξ_λ, le

degré des fonctions entières des ξ_λ peut être réduit à $p-1$ et qu'ainsi on peut écrire pour les éléments des 3e, 4e ... colonnes du déterminant :

$$(a_0^{(\lambda)} + a_1^{(\lambda)}\xi_\lambda + \cdots + a_{p-1}^{(\lambda)}\xi_\lambda^{(p-1)})^{h+1} = a_0^{(h)} + a_1^{(h)}\xi_\lambda + \cdots + a_{p-1}^{(h)}\xi_\lambda^{p-1},$$
$$h = 1, 2, 3, \ldots, p-2.$$

D'après cette remarque et d'après la règle de multiplication des déterminants, nous obtenons directement pour $\Delta^2(x_0, x_1, \ldots, x_{p-1})$ l'expression

$$\begin{vmatrix} 1 & a_0^{(0)} & a_0^{(1)} & \cdots & a_0^{(p-2)} \\ 0 & a_1^{(0)} & a_1^{(1)} & \cdots & a_1^{(p-2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & a_{p-1}^{(0)} & a_{p-1}^{(1)} & \cdots & a_{p-1}^{p-2} \end{vmatrix}^2 \cdot \left| \xi_i^k \right|^2_{(i,\, k=0,\, 1,\, 2,\, \ldots,\, p-1)}.$$

Nous écrirons en abrégé :

$$\Delta^2(x_0, x_1, \ldots, x_{p-1}) = \Delta^2 \cdot \left| \xi_i^k \right|^2.$$

Si maintenant les quantités ξ_λ comprennent σ couples de racines imaginaires conjuguées, la dernière relation ne peut avoir lieu que si le carré du déterminant Δ a le signe de $(-1)^{\sigma+\rho}$; du reste, le déterminant dont il s'agit est formé rationnellement au moyen des quantités $a_0^{(0)}, a_1^{(0)}, \ldots, a_{p-1}^{0)}$. Ainsi, quand $\sigma + \rho$ est impair, la dernière formule ne peut avoir lieu que si quelques-uns des nombres $a_0^0, \ldots, a_{p-1}^0$ ne sont pas réels. Nous sommes donc conduits à ce théorème :

Dans un domaine de rationalité réel déterminé, une racine d'une équation algébrique irréductible de degré premier p *ne peut pas être exprimée en fonction entière à coefficients réels d'une racine d'une autre équation irréductible de même degré, qui appartient au même domaine de rationalité et qui a un nombre impair de couples de racines imaginaires conjuguées en plus ou en moins que la première.*

A ma connaissance, ce théorème n'a pas encore été énoncé directement.

Observons que pour une équation résoluble algébriquement, c'est-à-dire pour une équation dont les racines s'expriment au moyen des racines d'équations auxiliaires binômes de degré premier, les degrés des équations auxiliaires sont diviseurs du degré de l'équation ; nous obtenons, comme corollaire du théorème précédent, cette proposition :

Dans un domaine de rationalité réel déterminé, une équation irréductible de degré premier p, *résoluble algébriquement, ne peut pas être résolue par le seul emploi de quantités réelles quand le nombre des couples de racines imaginaires conjuguées n'est pas de même parité que* $\frac{p-1}{2}$.

Comme cas particuliers, on a ces deux énoncés :

Dans un domaine de rationalité réel déterminé, une équation irréductible, résoluble algébriquement, dont le degré est un nombre premier de la forme $p = 4s + 3$, *ne peut pas être résolue algébriquement par le seul emploi de quantités réelles quand les couples de ses racines imaginaires conjuguées sont en nombre pair.*

Dans un domaine de rationalité réel déterminé, une équation irréductible, résoluble algébriquement, dont le degré est un nombre premier de la forme $p = 4s + 1$, *ne peut pas être résolue algébriquement par le seul emploi de quantités réelles quand elle a des couples de racines imaginaires conjuguées en nombre impair.*

Pour $s = 0$, le dernier théorème montre la nécessité du *cas irréductible de la formule de Cardan.*

Vienne, le 2 juin 1900.

3 2044 106 293 335